

専修大学北海道短期大学 正員 〇三 上 敬 司
 北海道大学 正員 能 町 純 雄
 室蘭工業大学 正員 松 岡 健 一

1. まえがき

この種の従来の研究においては、Luccoらが、フレッドホルム型積分方程式法を用い、半無限弾性体の表面上に半径 r_0 、質量 0 の剛円形フーチングが存在する場合、そのフーチングの中心に作用する調和振動に対する複素コンプライアンスを求めている。著者らは、後述する方法を用い、半無限弾性体に水平振動が伝わる際、その表面上に半径 r_0 、高さ h 、質量 m_0 をもつ剛体基礎が存在する場合、その水平振動に対する剛体基礎の複素コンプライアンスを求めた。さらに、Luccoらの方法によって求められた複素コンプライアンスと著者らの方法によって求められた複素コンプライアンスとを比較検討してみた。

2. 解式の概略と変位式

Lamé定数 G 、 λ 、密度 ρ である半無限弾性体上に水平振動が伝わるときの円柱座標の動的三次元運動方程式は

$$G \nabla^2 \mathbf{u} + (G + \lambda) \text{grad} \cdot \text{div} \mathbf{u} = \rho \mathbf{u} \quad (1) \quad \text{ここで、} \mathbf{u}: r, \theta, z \text{ 方向の変位 } u = U e^{i\omega t}, v = V e^{i\omega t}, w = W e^{i\omega t} \text{ である。}$$

式(1)について、 r, z 方向にはハンケル変換、 θ 方向にはフーリエ変換、時間にはラプラス変換を施し、それぞれの像関数を求め、さらに、それらを逆変換して求めた解は次式となる。

$$\bar{u} = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty e^{i\omega t} \{ A_{mn} J_{m+1}(sr) + B_{mn} J_{m-1}(sr) \} s ds \cdot \cos \theta \quad (2) \quad \bar{v} = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty e^{i\omega t} \{ A_{mn} J_{m+1}(sr) - B_{mn} J_{m-1}(sr) \} s ds \cdot \sin \theta \quad (3)$$

$$\bar{w} = \int_0^\infty e^{i\omega t} \left[\frac{3}{8\beta^2} e^{-\alpha z} - \frac{3}{8\beta^2} e^{-\beta z} \right] J_{m+1}[T^\alpha] + \left\{ -\frac{3}{8\beta^2} e^{-\alpha z} + \frac{3}{8\beta^2} e^{-\beta z} \right\} J_{m-1}[T^\alpha] + \left\{ \frac{2G}{\beta^2} e^{-\alpha z} + e^{-\beta z} - \frac{2G}{\beta^2} e^{-\beta z} \right\} J_m[C_m[\omega]] \right] J_m(sr) \cdot \cos \theta \quad (4)$$

上式中の分変位 A_{mn}, B_{mn} は、

$$A_{mn} = \frac{\pi}{2} \left[\left\{ \frac{e^{-\alpha z}}{8\beta^2} \left(\frac{3}{2} - \frac{\beta^2}{G} \right) - \frac{\beta^2}{2\beta^2} e^{-\beta z} \right\} J_{m+1}[T^\alpha] + \left\{ -\frac{\beta^2}{2\beta^2} e^{-\alpha z} + \frac{\beta^2}{2\beta^2} e^{-\beta z} \right\} J_{m-1}[T^\alpha] \right. \\ \left. - \left\{ \frac{3}{8\beta^2} e^{-\alpha z} - \frac{3}{8\beta^2} e^{-\beta z} \right\} \left[\frac{e^{-\alpha z}}{\alpha} - \frac{e^{-\beta z}}{\beta} \right] J_m[C_m[\omega]] \right] \quad (5)$$

$$B_{mn} = \frac{\pi}{2} \left[\left\{ -\frac{\beta^2}{2\beta^2} e^{-\alpha z} + \frac{\beta^2}{2\beta^2} e^{-\beta z} \right\} J_{m+1}[T^\alpha] + \left\{ -\frac{e^{-\alpha z}}{8\beta^2} \left(\frac{3}{2} - \frac{\beta^2}{G} \right) - \frac{\beta^2}{2\beta^2} e^{-\beta z} \right\} J_{m-1}[T^\alpha] \right. \\ \left. + \left\{ \frac{3}{8\beta^2} e^{-\alpha z} - \frac{3}{8\beta^2} e^{-\beta z} \right\} \left[\frac{e^{-\alpha z}}{\alpha} - \frac{e^{-\beta z}}{\beta} \right] \right] J_m[C_m[\omega]] \quad (6)$$

上式中の α, β : 円振動数, $\alpha = \sqrt{3^2 + \frac{\beta^2}{G}}, \beta = \sqrt{3^2 + \frac{\beta^2}{2G + \lambda}}, m = 1$ とする。

3. 境界条件

円柱剛体(半径 r_0 、高さ h 、質量 m_0)が媒体に密着し、その底面を通して媒体に及ぼす τ_{xz} 、 σ_z の分布を静的弾性接触問題における円形スタンプ下の応力分布をタウミの重み関数と仮定するBycroft理論に従って剛体スタンプの応力分布を次式のように仮定する。

$$\tau_{xz}|_{z=0} = H e^{i\omega t} / 2\pi r_0 \sqrt{r_0^2 - r^2}, \quad \sigma_z|_{z=0} = 3M_y e^{i\omega t} r \cos \theta / 2\pi r_0^3 \sqrt{r_0^2 - r^2} \quad \text{for } r < r_0 \quad (7)$$

また、一般化されたウエイトを用い、剛体底面における平均水平変位 u_a と y 軸回りの平均回転角 ϕ_a を次のように定義すると、

$$u_a = \frac{1}{2\pi r_0} \int_0^{2\pi} \int_0^{r_0} \frac{u \cos \theta - v \sin \theta}{\sqrt{r_0^2 - r^2}} r dr d\theta, \quad \phi_a = \frac{3}{2\pi r_0^3} \int_0^{2\pi} \int_0^{r_0} \frac{r^2 w}{\sqrt{r_0^2 - r^2}} \cos \theta dr d\theta \quad (8)$$

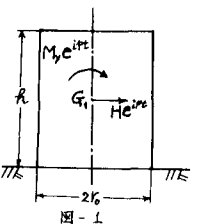


図-1

式(7)、(8)を適用して、平均水平変位 u_a 、平均回転角 ϕ_a と水平力 H 、回転モーメント M_y との

関係式をLuccoの記号と同様に表現すると、

$$\begin{bmatrix} u_a \\ \phi_a \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} C_{HH} & C_{HM} \\ C_{MH} & C_{MM} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H \\ M_y \end{bmatrix} \quad (9) \quad \begin{array}{l} C_{HH}: \text{水平力による複素コンプライアンス, } C_{HM} = C_{MH}: \text{水平力によるRockingと} \\ \text{Rockingによる水平力の複素コンプライアンスはBettiの相互定理より相等的い。} \\ C_{MM}: \text{Rockingによる複素コンプライアンスである。} \end{array}$$

式(9)中の複素コンプライアンス C_{HH} , C_{MH} , C_{MM} を以下に示す。

$$C_{HH} = \frac{1}{4\pi G \gamma_0^3} \int_0^\infty \left[-\frac{(1-\eta^2)\bar{\alpha}(\bar{\beta}+\bar{\alpha})}{F(\bar{\alpha}\bar{\beta})} + \frac{1}{\bar{\alpha}} \right] \gamma_1^2 d(a_0\delta) \quad (10)$$

$$C_{MH} = C_{HM} = \frac{3}{4\pi G \gamma_0^3} \int_0^\infty \left[\frac{(1-\eta^2)\{\bar{\beta} - (1-2\eta^2)\bar{\alpha}\}}{F(\bar{\alpha}\bar{\beta})} \right] \gamma_1 \cdot \gamma_2(a_0\delta) d(a_0\delta) \quad (11)$$

$$C_{MM} = \frac{9}{4\pi G \gamma_0^3} \int_0^\infty \left[\frac{(1-\eta^2)\bar{\beta}(\bar{\beta}+\bar{\alpha})}{F(\bar{\alpha}\bar{\beta})} \right] \gamma_2^2 \frac{d\delta}{a_0\delta} \quad (12)$$

上式で求めた記号は, $\bar{\alpha} = \sqrt{\delta^2 - 1}$, $\bar{\beta} = \sqrt{\delta^2 - \eta^2}$, $F(\bar{\alpha}\bar{\beta}) = \bar{\beta}^3 - (3-4\eta^2)\bar{\beta}\bar{\alpha} - (1-2\eta^2)\bar{\alpha}^3$, $\gamma_1 = \sin(a_0\delta)/a_0\delta$, $\gamma_2 = \sin(a_0\delta)/a_0\delta - \cos(a_0\delta)$, $\eta^2 = G/(2G+\lambda)$, $K^2 = \rho\delta^2/G$, $a_0 = K/\gamma_0$ とおく。

4. 数値計算

数値計算例として, ボアソン比 $\nu=0$ のときの複素コンプライアンスを求めた。図-2は, 水平力による複素コンプライアンス C_{HH} , 図-3は, 水平力による Rocking の複素コンプライアンス C_{MH} , 図-4は, Rocking による複素コンプライアンス C_{MM} である。縦軸には, 静的なコンプライアンスに対する動的な複素コンプライアンスを取り, 横軸には, 無次元円振動数 $a_0 = \sqrt{\rho/G} \gamma_0$ を取った。さらに, Lucó の方法によって求められた複素コンプライアンスをプロットし, 著者らの方法とを比較してみると, 図-2, 3, 4において, 低周波部では Lucó の複素コンプライアンスと著者らの複素コンプライアンスとは, ほとんど一致しているが, 周波数が大きくなるに従って異なった形状を示している。Lucó の複素コンプライアンスは, 高周波部で単純減衰しているが, 著者らの複素コンプライアンスは, 周波数が大きくなるに従って, 波状減衰していることがわかった。さらに, 図-4に示している Rocking による複素コンプライアンス C_{MM} においては, より著しい波状減衰していることがわかった。

ただし, 図-3の Lucó の複素コンプライアンスは, 無次元円振動数 $a_0 = 5.0$ までしか求められていない。

5. 結び

フレッドホルム積分方程式法によって求められたコンプライアンスが周波数に対して単純減衰形になっているが, 著者らの方法によって求められたコンプライアンスは, 周波数に対して波状減衰になる項を含み, 高周波では, その影響が強くなることがわかった。

(参考文献)

Lucó, J and Westmamm, R: "Dynamic Response of Circular Footings" Proc. ASCE, EM.5, P.1381
三上, 能町, 角田: 土木学会北海道支部論文報告集, 才36号, P73. 1980

