I-206　弾性地盤に埋設されたコンクリート管の強制振動解法（固有マトリクス法）

信州大学　正員　○夏目正太郎
信州大学　正員　石川　清志
金沢工業大学　正員　谷本勉之助

1．はじめに

線材系の強制振動問題を、固有マトリクス法にて解こうとするものである。静力学的問題の固有マトリクス法による解法は、外力（荷重）の扱いを、いわゆる荷重マトリクスを導入することにより、非常に明快にしかも能率よく任意点に載荷された荷重を処理することが出来た。これは固有マトリクス法の一大特徴であろう。そこで同じ考え方を、強制外力による振動問題に取り入れることにしたのである。この時には、付加質量は荷重ではあるが、質量マトリクスと命名する項に入れ、動的外力をいわゆる荷重マトリクスの部分におさめるようになる。かくすると異った性質をもった部材、またはその周辺の弾性地盤についても、移行演算が極めて明確に表示され、繰り返し演算によるので能率よく計算処理が出来る。強制振動問題の解法は結局つぎの3つの問題処理として扱い、これらの総合的解の集積で問題が解けたとなる。すなわち(1)固有値問題、(2)境界値問題、(3)初期値問題がそれである。さて、古来知られている表題の如き問題の微分方程式は

$$\frac{\partial^4 w}{\partial \rho^4} + \frac{\gamma A L^4}{g EI}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{k L^4}{EI} w = \frac{Q L^4}{EI}\sin pt \qquad (1)$$

であろう。この変位量は、同次解のそれと、特解のそれとの和で示されるものとすれば、

$$w = w_h + w_p \qquad (2)$$

となる。そして

$$\frac{\partial^4 w_h}{\partial \rho^4} + \frac{\gamma A L^4}{g EI}\frac{\partial^2 w_h}{\partial t^2} + \frac{k L^4}{EI} w_h = 0 \qquad (3)$$

$$\frac{\partial^4 w_p}{\partial \rho^4} + \frac{\gamma A L^4}{g EI}\frac{\partial^2 w_p}{\partial t^2} + \frac{k L^4}{EI} w_p = \frac{Q L^4}{EI}\sin pt \qquad (4)$$

によって支配されるものとする。

2．同次解による振動固有値

(3)式から導かれる状態量は

$\frac{\gamma}{g}A\omega^2 - k \geqq 0$

$$\begin{bmatrix} w \\ \theta \\ M \\ S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{\nu}{L} \\ -\frac{\nu^2 EI}{L^2} \\ -\frac{\nu^3 EI}{L^3} \end{bmatrix}^D \begin{bmatrix} \cos\nu\rho & \sin\nu\rho & ch\nu\rho & sh\nu\rho \\ -\sin\nu\rho & \cos\nu\rho & sh\nu\rho & ch\nu\rho \\ -\cos\nu\rho & -\sin\nu\rho & ch\nu\rho & sh\nu\rho \\ \sin\nu\rho & -\cos\nu\rho & sh\nu\rho & ch\nu\rho \end{bmatrix} N e^{i\omega t};$$

$\frac{\gamma}{g}A\omega^2 - k < 0$

$$\begin{bmatrix} w \\ \theta \\ M \\ S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{\nu}{L} \\ -\frac{\nu^2 EI}{L^2} \\ -\frac{\nu^3 EI}{L^3} \end{bmatrix}^D \begin{bmatrix} \cos\nu\rho & \sin\nu\rho & \cos\nu\rho & \sin\nu\rho \\ \cos\nu\rho-\sin\nu\rho & \cos\nu\rho+\sin\nu\rho & -(\cos\nu\rho+\sin\nu\rho) & \cos\nu\rho-\sin\nu\rho \\ -2\sin\nu\rho & 2\cos\nu\rho & 2\sin\nu\rho & -2\cos\nu\rho \\ -2(\cos\nu\rho+\sin\nu\rho) & 2(\cos\nu\rho-\sin\nu\rho) & 2(\cos\nu\rho-\sin\nu\rho) & 2(\cos\nu\rho+\sin\nu\rho) \end{bmatrix} \cdot \{e^{\nu\rho}\ e^{\nu\rho}\ e^{-\nu\rho}\ e^{-\nu\rho}\} N e^{i\omega t} \qquad (5)$$

簡略記法に従えば

$$W_{hr}(\rho) = D_r \cdot R_r(\nu\rho) \cdot N_r\, e^{i\omega t} \qquad (6)$$

である。埋設コンクリート管の内部に均質な物質が充満していたときは、これが質量マトリクスとしてあらわされ、(6)式は

$$W_{hr}(\rho) = D_r \cdot R_r(\nu\rho) \cdot [E + R(\nu\rho)]_r N_r\, e^{i\omega t} \qquad (7)$$

のようにかける。固有マトリクス$\mathbb{N}$の移行演算方式によれば、隣接部材の状態量が連続性を与えることにより、

$$\mathbb{N}_r = \mathbb{L}'_r \, \mathbb{N}_{r-1} \tag{8}$$

$$\mathbb{L}'_r = \mathbb{R}_r^{-1}(0) \cdot \mathbb{D}_r^{-1} \cdot \mathbb{D}_{r-1} \cdot \mathbb{R}_{r-1}(\nu) \left[\mathbb{E} + \mathbb{R}(\nu)\right]_{r-1} \tag{9}$$

で第r番目の固有マトリクスとそれより1つ前の固有マトリクスの関係がつけられた。さらに第1番目のものとのつながりは、

$$\mathbb{N}_r = \mathbb{G}'_r \, \mathbb{N}_1 \tag{10}$$

$$\mathbb{G}_r' = \mathbb{L}_r' \, \mathbb{G}'_{r-1} \quad ; \quad \mathbb{G}_1' = \mathbb{E}. \tag{11}$$

である。故に両端の境界条件を

$$\mathbb{B}_1 \, \mathbb{N}_1 = 0 \tag{12}$$

$$\mathbb{B}_K' \cdot \mathbb{N}_K' = 0 \tag{13}$$

とすれば

$$\det \begin{bmatrix} \mathbb{B}_1 \\ \mathbb{B}_K' \cdot [\mathbb{E} + \mathbb{R}(\nu)]_K \mathbb{G}_K' \end{bmatrix} = 0 \tag{14}$$

が固有値方程式となり，ω_1，ω_2，$\omega_3 \cdots\cdots \omega_n$ なるこの系に対する固有値がでる。これら固有値を(12)(13)へ入れることにより，

$$\mathbb{N}_1 = \mathbb{P}_n(\omega) \, \Omega_n \tag{15}$$

であらわされる。

3．特解による荷重マトリクスと固有マトリクス

特解を

$$w_p = \bar{w}_p \sin pt \tag{16}$$

とすれば，特解による状態量は同次解と同様な形であらわされ，等分布外力による強制力が荷重マトリクスに含まれる。

$$\mathbb{K}_r(\beta\rho) = \int_0^\rho \left[\mathbb{E} + \mathbb{R}(\beta\kappa)\right]_r^{-1} \mathbb{R}_r(\beta\kappa)^{-1} \cdot \left(\frac{8 L^4}{EI\beta^3}\right)_r d\kappa \tag{17}$$

であり，従ってその状態量は

$$\mathbb{W}_p(\rho)_r = \mathbb{D}_r \mathbb{R}(\beta\rho)_r \cdot [\mathbb{E} + \mathbb{R}(\beta\rho)]_r \left[\mathbb{G}_r \mathbb{N}_1 + \mathbb{P}_{r-1} + \mathbb{K}_r(\beta\rho)\right] \sin pt \tag{18}$$

のようになる。そこで境界条件をもってくれば，固有マトリクス$\mathbb{N}_1$は決定される。

$$\mathbb{N}_1 = \begin{bmatrix} \mathbb{B}_1 \\ \mathbb{B}_K' \cdot [\mathbb{E} + \mathbb{R}(\beta)]_K \cdot \mathbb{G}_K \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -\mathbb{B}_K' \end{bmatrix} [\mathbb{P}_{K-1} + \mathbb{K}(\beta)_K] \tag{19}$$

故にこの部分は境界値問題という。

4．初期値問題でΩを決定

合成された状態量は

$$\mathbb{W}_r(\rho) = \sum \left[\left[\mathbb{D}\mathbb{R}(\nu\rho) \cdot [\mathbb{E} + \mathbb{R}(\nu\rho)] \mathbb{G}'_r\right]_r \mathbb{P}_n(\omega) \Omega_n\right] e^{i\omega t} + \mathbb{D}_r \mathbb{R}_r(\beta\rho) \cdot [\mathbb{E} + \mathbb{R}(\beta\rho)]_r \left[\mathbb{G}_r \mathbb{N}_1 + \mathbb{P}_{r-1} + \mathbb{K}_r(\beta\rho)\right] \sin pt \tag{20}$$

初期条件としては，変位量と，変位速度が共にゼロであるとこれらの式をFourier-sine級数で表示して，その係数を消去する条件を入れると，未定のままである所のΩ_nが求まり，(20)式より，合成された状態量が，時間を追って調べることが出来るというものである。