

九州大学 工学部 正員 小坪 清真
九州工業大学 正員 〇高西 照彦
九州工業大学 学生員 川 西 政雄

1. まえがき 著者等は、前論⁽¹⁾において、楕円柱の2次元動水圧に関する模型実験を行って、楕円柱に対する水の付加質量を求めたが、その際、水の粘性を考慮して実験値を補正すれば、振動方向の軸長 $2b$ とそれに直角な方向の軸長 $2a$ との比 b/a が、1より大きい横断面を有する楕円柱に対しては、付加質量の理論値(理想流体中においては、水の密度を ρ_w とすれば $\pi a^2 \rho_w$ である)と実験値とがよく一致することを示した。しかし、 b/a が1より小さい場合には、実験値の方が理論値よりも大きく、両者の間には差が生じており、 $b/a \rightarrow 0$ となるに従ってその差が次第に大きくなる傾向を示していた。この場合には、 b/a が小さくなるに従って、楕円断面の長軸の両端付近における流体の流速及びその変化の割合が大きくなり、Navier-Stokes の方程式における移動慣性項の影響を無視することができなくなるのが、上記の差が生じた原因ではないかと考えられる。本論は、有限要素法を用いて、実験値に対して、流体の粘性項及び移動慣性項を考慮した補正を施すことによって、実験値と理論値とがよく一致することを確かめたものである。これによって、楕円柱に対する水の付加質量に及ぼす流体の移動慣性項の影響を明らかにした。

2. 基礎方程式 2次元非圧縮粘性流体中で、一樣断面を有する無限長柱が、軸直角方向に一樣な剛振動をする場合を考える。柱の横断面に平行に直角座標系 (x, y) を設定し、 x, y 方向の流速を u, v 、流体の密度を ρ_w とすれば、流体の運動方程式は次式によって与えられる(ここで、物体力は省略した)。

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{\rho_w} \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \right) \text{----- (1)}, \quad \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{\rho_w} \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} \right) \text{----- (2)}$$

$$\text{ここに、} \sigma_x = -p + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right), \quad \sigma_y = -p + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} \text{----- (3)}$$

上式において、 μ は流体の粘性係数、 p は動水圧である。また、連続の方程式は $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$ ----- (4) である。有限要素法を用いて、式(1)~(4)を満足する解を求めるために、Galerkin 法にもとずく定式化⁽²⁾を行った。これより、解析領域をいくつかの有限要素に分割したとき、一つの有限要素について、次式に示すような有限要素法による解析式が得られる。上式を導くとき、こ

$$\left. \begin{aligned} & (\omega M_{\alpha\beta} + G_{\alpha\beta}^{xx}) u_\beta + G_{\alpha\beta}^{xy} v_\beta + K_{\alpha\beta}^x u_\beta u_\gamma + K_{\alpha\beta}^y v_\beta u_\gamma - H_{\alpha\lambda}^x p_\lambda = \Omega_{\alpha x} \\ & G_{\alpha\beta}^{xy} u_\beta + (\omega M_{\alpha\beta} + G_{\alpha\beta}^{yy}) v_\beta + K_{\alpha\beta}^x u_\beta v_\gamma + K_{\alpha\beta}^y v_\beta v_\gamma - H_{\alpha\lambda}^y p_\lambda = \Omega_{\alpha y} \\ & H_{\alpha\lambda}^x u_\lambda + H_{\alpha\lambda}^y v_\lambda = 0 \end{aligned} \right\} \text{----- (5)}$$

の有限要素内の任意点の流速及び動水圧は、形状関数 ϕ_α, ψ_α 、並びに各節点における流速 u_β, v_β 及び動水圧 p_λ の値を用いて次のように表わせるものとした。 $u = \phi_\alpha u_\alpha e^{i\omega t}$, $v = \psi_\alpha v_\alpha e^{i\omega t}$, $p = p_\lambda \psi_\lambda e^{i\omega t}$ ----- (6)

さらに、同時に式(1)~(4)にそれぞれ $e^{i\omega t}$ を掛けて、時間 t に関して一周期 T にわたって積分を行った。上式において、 $M_{\alpha\beta}$ 等で表わされる各係数は、形状関数によって定まる定数であり、 $\Omega_{\alpha x}, \Omega_{\alpha y}$ は境界条件が与えられれば求めることができる定数である。また、 ω は楕円柱の水中における減衰自由振動の複素円振動数であり、その実数部が減衰を、虚数部が固有円振動数を表わす。なお、式(5), (6)においては、 $\alpha, \beta, \gamma, \lambda$ について総和規約が用いられている。解析領域 V 内のそれぞれの有限要素について、式(5)をたてて、これらをすべて重ね合わせれば、 V 内の全節点における流速 u_β, v_β 及び動水圧 p_λ に関する非線型連立方程式が得られる。 ω を既知とすれば、この方程式を領域 V に関する境界条件を満たすように解くことによって、全節点における流速及び動水圧を求めることができる。楕円柱に対する振動方向(x 方向)の流体の抵抗力は $R_x = \int_{S'} (\sigma_{xx} l + \tau_{yx} m) dS'$ -----

(7) によって与えられる。ここに、 S' は楕円柱の横断面の周を表す。また、 m は、この周に対する法線方向余弦である。

3. 水中における無限長柱の振動方程式

2次元非圧縮粘性流体中に、ばねでつるされた一様断面を有する無限長柱が、軸直角方向(x方向)に一様な剛性振動をしているとき、この楕円柱に対する振動方程式は次式のように書くことができる。

$$m \frac{d^2 \xi}{dt^2} + k \xi - R_x = 0 \quad \text{----- (8)}$$

ここに、 m は楕円柱の単位長さ当たりの質量、 k は楕円柱に対する単位長さ当たりのばね定数、 R_x は式(7)で与えられる流体の抵抗力である。いま、楕円柱が近似的に $\xi = U_0 e^{i\omega t}$ ----- (9) で表わされる減衰自由振動を行っているときとみなせる場合を考える。

$R_x = R_{0x} e^{i\omega t}$ として、式(9)と共にこれを式(8)に代入すれば、 $\omega^2 m U_0 + k U_0 - \omega R_{0x} = 0$ ----- (10) が得られる。

R_{0x} は ω を陰に含んでいるので、式(10)から ω を直ちに求めることはできない。したがって、式(5)を重ね合わせて作られる非線型連立方程式と式(10)とを同時に満足する ω の値を求めることが必要である。いま、空気中における楕円柱の固有円振動数を n_a 、 ω の虚数部を n_w とすれば、楕円柱に対する単位長さ当たりの水の付加質量は $\Delta m = \{ (n_a/n_w)^2 - 1 \} m$ ----- (11) によって与えられる。

楕円柱横断面の振動方向に垂直な面への投影長を a とすれば、水の付加質量係数は $\alpha_m = \Delta m / \pi a^2 \rho_w$ ----- (12) によって定義される。なお、楕円柱の水中での減衰定数は、 ω の虚数部を $-c_w$ とおけば $k_w = c_w / n_w$ ----- (13) によって与えられる。

4. 数値解析結果及び考察

前章の理論に従って、楕円柱が水中で減衰自由振動を行うとき、楕円柱横断面の長軸と短軸の長さをいろいろに変えた場合について数値計算を行って、楕円柱の水中における固有円振動数と減衰定数とを求めた。計算は対称性を考えて全領域の1/4について行った。図-1に有限要素分割の一例を示した。境界条件としては、図-1においてABCD上で $v=0$ 、BC上で $u=0$ 、CD上で $p=0$ 、DA上で $u=0$ 。

$e^{i\omega t}$ である。図-2に流速と動水圧分布の一例を示した。図-3は前論⁽¹⁾で得られた実験値に粘性のみを考慮して補正を施した場合(○印)と粘性と移動慣性項とを同時に考慮して補正した場合(●印)とを示した。●印は、すべての b/a に対して、理想流体における α_m の理論値(=1)にきわめてよく一致していることがわかる。表-1は、減衰定数に関して、実験値と計算値とを比較したものである。図-4、5は固有振動数 n_w によって、付加質量係数及び減衰定数がどのように変化するかを示したものである。

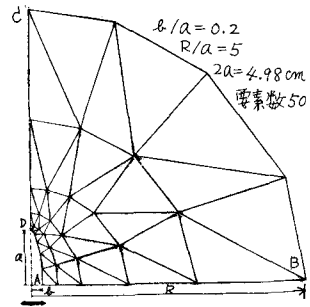


図-1 有限要素分割の例

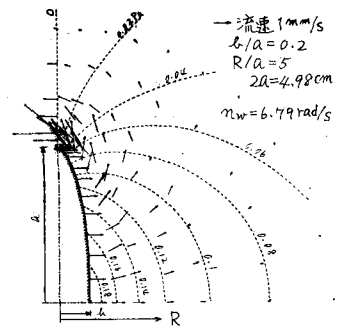


図-2 流速と動水圧の分布

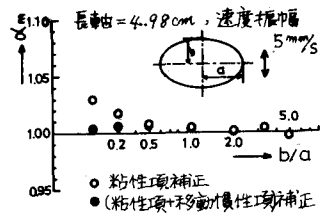


図-3 付加質量係数

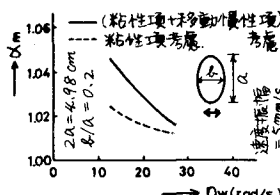


図-4 付加質量係数

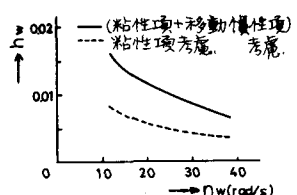


図-5 減衰定数

模型 No.	軸長 (cm)	振動方向	実験値		粘性項考慮		(粘性項+移動慣性項)考慮	
			長軸	短軸	長軸	短軸	長軸	短軸
模型Ⅰ	$a=4.98$ $b=1.00$		0.036	0.032	0.027	0.020	0.027	0.025
模型Ⅱ	$a=4.98$ $b=1.50$		0.035	0.029	0.025	0.019	0.025	0.023
模型Ⅲ	$a=4.98$ $b=2.48$		0.033	0.026	0.023	0.019	0.023	0.021

表-1 減衰定数に関する計算値と実験値との比較

(1) 高西・川西：楕円柱に対する水の付加質量，九州工業大学研究報告(工学) 第39号，1979.9.

(2) 川原・服本：流れ関数による二次元非圧縮粘性流体の定常有限要素解析，土木学会論文報告集 No. 247，1976.3.