

1. まえがき

近年、地表・地中の同時地震観測が広く普及した。本報告は、これらの観測記録を用いて、垂直入射したSH波の多重反射状態にある区間の判定と、このときの地盤の波動伝達関数 $G_1(\lambda)$ (地表観測波/地中観測波) の推定とを並行して扱う一つの統計的手法を提案し、その有用性を観測記録へ適用して考察したものである。

2. 伝達関数推定のための時系列モデル

地表観測波 $\{y_n\}_{n=1}^N$ 及び地中観測波 $\{x_n\}_{n=1}^N$ を用いて $G_1(\lambda)$ を推定するため、次式の時系列モデルを提案する。

$$y_n + \sum_{k=1}^p \alpha_k y_{n-k} = (1 + \sum_{k=1}^p \alpha_k) x_{n-b} + w_n \quad (1)$$

$$w_n + \sum_{k=1}^q \beta_k w_{n-k} = v_n \quad (2)$$

ただし、 $\{v_n\}$ を正規性白雑音過程とし、 $E[\cdot]$ と $\cdot$ の期待値を表現するとして次式を仮定する。

$$E[x_n]=0, E[y_n]=0, E[v_n]=0, E[v_n v_m] = \sigma_v^2 \delta_{nm} \quad (3)$$

$G_1(\lambda)$ は、 $\lambda = \omega T$ を標準化円振動数として

$$G_1(\lambda) = \frac{(1 + \sum_{k=1}^p \alpha_k z^{-k}) z^{-b}}{1 + \sum_{k=1}^q \beta_k z^{-k}}, \quad |\lambda| \leq \pi \quad (4)$$

となる。ただし、 $z = e^{i\lambda}$ 、 T は標準化時間である。

3. モデルの最尤推定

時系列モデル (1)、(2) 及び (3) 式におけるパラメータ $\{\alpha_1, \dots, \alpha_p, \beta_1, \dots, \beta_q, \sigma_v^2\}$ は、 $\{v_n\}_{n=1}^N$ の近似対数尤度関数 L を最小化するものとして推定される。

$$L = -2 \log_e \left[(2\pi \sigma_v^2)^{-N/2} \exp \left(-\frac{\sum_{n=1}^N v_n^2}{2\sigma_v^2} \right) \right] \quad (5)$$

まず、 σ_v^2 に関する最小化から、 $\sigma_v^2 = S_v^2$ となり、次式 M の最小化問題となる。

$$M = \log_e S_v^2, \quad S_v^2 = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N v_n^2 \quad (6)$$

以下、問題を周波数領域で扱うため、次式のフーリエ表示を用いる。

$$X(\lambda) = N^{-1/2} \sum_{n=1}^N x_n z^{-n}, \quad Y(\lambda) = N^{-1/2} \sum_{n=1}^N y_n z^{-n} \quad (7)$$

$$A(\lambda) = 1 + \sum_{k=1}^p \alpha_k z^{-k}, \quad B(\lambda) = 1 + \sum_{k=1}^q \beta_k z^{-k} \quad (8)$$

$$V(\lambda) = B(\lambda) [A(\lambda) Y(\lambda) - A(\omega) z^{-b} X(\lambda)] \quad (9)$$

ここで、(7) 式は、 $x_n=0, y_n=0$ ($n \leq 0, n > N$) としたときの $x_n/\sqrt{N}$ 及び $y_n/\sqrt{N}$ のフーリエ表示と、(8) 式は、 α_k 及び β_k のフーリエ表示と、(9) 式は、 $v_n/\sqrt{N}$ のフーリエ表示と各々示す。パラメータ・ベクトル $\hat{\theta}' = (\alpha_1, \dots, \alpha_p, \beta_1, \dots, \beta_q) = (\theta_1, \dots, \theta_{p+q})$ に関する M の最小化が、ベクトル列 $\{\hat{\theta}_n\}$ で与えられるとする。' は行列の転置を示すとする。 M を $\hat{\theta}_n$ でテラー展開し、最初の三項までとすると次式となる。

$$M(\hat{\theta}_n) = M(\hat{\theta}_n) + \frac{1}{2} (\hat{\theta}_n - \hat{\theta}_n)' H(\hat{\theta}_n) (\hat{\theta}_n - \hat{\theta}_n) \quad (10)$$

$M(\hat{\theta}_n)$ の $\hat{\theta}_n$ に関する最小化により、次推定式を得る。

$$\hat{\theta}_{n+1} = \hat{\theta}_n - H^{-1}(\hat{\theta}_n) \nabla M(\hat{\theta}_n) \quad (11)$$

ここで、グラジエント $\nabla M(\hat{\theta}_n)$ の i 成分、ヘッセ $H(\hat{\theta}_n)$ の (i, j) 成分は、 $\hat{\theta}_n$ の i 成分と $\hat{\theta}_n$ とあれば、次式となる。

$$\nabla M(\hat{\theta}_n) \Big|_i = \frac{2}{\sigma_v^2} \int_{-\pi}^{\pi} V(\lambda) \frac{\partial V(\lambda)}{\partial \hat{\theta}_i^{(n)}} d\lambda \quad (12)$$

$$H(\hat{\theta}_n) \Big|_{ij} = \frac{2}{\sigma_v^2} \int_{-\pi}^{\pi} V(\lambda) \frac{\partial V(\lambda)}{\partial \hat{\theta}_i^{(n)}} \frac{\partial V(\lambda)}{\partial \hat{\theta}_j^{(n)}} d\lambda \quad (13)$$

ここで、

$$\hat{\sigma}_v^2 = \int_{-\pi}^{\pi} V(\lambda) V(-\lambda) d\lambda \quad (14)$$

(12)、(13) 及び (14) 式の実際の計算は、パラメータ・ベクトルと、 $\{x_n\}_{n=1}^N$ 及び $\{y_n\}_{n=1}^N$ から求める標本共分散行列の列とを用いてなされる。

4. 推定区間の選定

時系列モデル (1) 及び (2) 式における次数の組 (b, p, q) は、情報量規準 AIC を最小とする組とする。

$$AIC(b, p, q) = N \log_e \hat{\sigma}_v^2 + 2(p+q) \quad (15)$$

AIC を最小とする組を (b, p, q) とする。速度検尺資料に基づく計算による (b, p) の組を (b_0, p_0) とする。

$(b, p) \sim (b_0, p_0)$ は、時系列モデルのあてはめに用いた区間が多重反射状態にあることの一つの目安となる。これは、多重反射状態において、相互相関数

$$R_{YX}(kT) = \int_{-\pi}^{\pi} Y(\lambda) X(-\lambda) z^k d\lambda \quad (16)$$

が $k = \pm b_0$ 近傍でピークをもつほぼ偶関数の振動減衰形として理論的に与えられることととも有用である。

5. いくつかの応用

伝達関数の利得特性及び位相特性は、(4)式を用いて直接推定される。卓越振動における振動数 f_n 及び等価減衰定数 h_n は、 $1 + \sum_{k=1}^N \alpha_k z^{-k} = 0$ の根 $z_n = r_n e^{i\lambda_n}$ とすれば、 $(\hat{r}_n, \hat{\lambda}_n) \approx (|\lambda_n|/2\pi T, -\log_e \hat{r}_n / |\lambda_n|)$ として推定される。また、群遅延時間特性、例えば、群遅延時間特性 $\hat{\tau}_g(\omega)$ は、 $\hat{G}_r(\omega) = \hat{G}_r(\omega) + i \hat{G}_i(\omega)$ とすれば

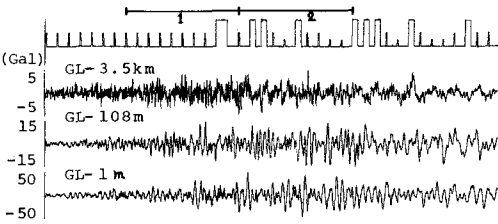
$$\hat{\tau}_g(\omega) = T \cdot [\hat{G}_r(\omega) \frac{d}{d\omega} \hat{G}_i(\omega) + \hat{G}_i(\omega) \frac{d}{d\omega} \hat{G}_r(\omega)] / |\hat{G}_r(\omega)|^2 \quad (17)$$


図1. 宮城県沖地震(1978)における各観測の記録(EW)

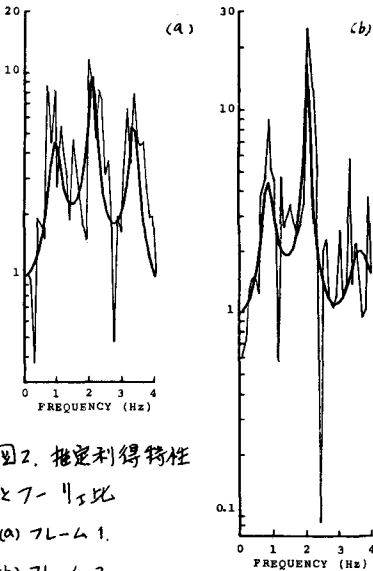


図2. 推定利得特性とフーリエ比

(a) フレーム1.
(b) フレーム2.

として推定される。ここで、微分量は次式から与える。

$$\frac{d}{d\lambda} \hat{G}_r(\omega) = -i \hat{G}_r(\omega) \left[b_0 - \frac{\sum_{k=1}^N k \alpha_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^N \alpha_k z^{-k}} \right] \quad (18)$$

6. 適用例

岩槻地震活動観測施設構内の地表(1m)及び地中(108m)における観測記録への適用結果を示す。記録は1978年宮城県沖地震のEW成分であり、これと図1に示すように二つのフレーム(各フレーム長10.24秒、 $T=0.02$ 秒、 $N=512$)に分けてモデルのあてはめを行った。 (b, p, g) は、第1フレームで(7, 34, 14)、第2フレームで(16, 33, 8)であった。速度検局資料に基づく (b_0, p_0) が(17, 35)であるから、第1フレームは多重反射状態のもののみを示す。図2でみられるように、フーリエ比と比較して推定利得特性の適合性も良い。また、深層からの波部分からこのフレームの多重反射形態が推察される。第2フレームで $b_0=16$ となったのは、 $2H_0$ の近い卓越振動における垂直方向の位相速度の上昇による。推定群遅延時間特性も、両フレームにおける伝播形態の違いを示している。

図3. 推定群遅延時間特性

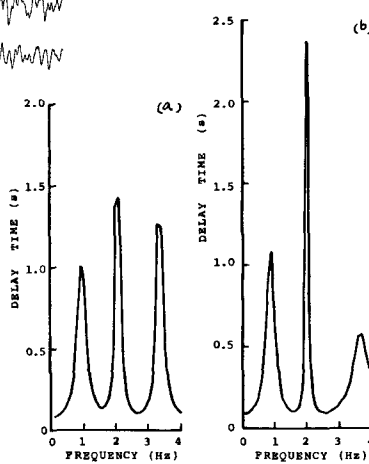


表1. 卓越振動数と等価減衰定数

n	G_0		G_1	$\hat{G}_1$			
	F_n (Hz)	h_n		FRAME 1		FRAME 2	
	F_n (Hz)	h_n	F_n (Hz)	F_n (Hz)	h_n	F_n (Hz)	h_n
1	0.91	0.397	0.88	0.92	0.173	0.87	0.168
2	2.18	0.126	2.17	2.06	0.038	2.03	0.012
3	3.29	0.098	3.32	3.35	0.033	3.65	0.085

図4. 推定位相速度特性(垂直方向)