I-192　多重相関をもつ定常ランダム過程シミュレーションの1手法

（株）開発計算センター　正会員　○紀村禎昭
東工大大学院総合理工学研究科　正会員　大町達夫

1．まえがき

長大なあるいは重要な構造物の耐震設計において，多成分の同時地震波を入力することが適切な場合がある。これらの多成分入力地震波を人工的に発生させるいくつかの方法が提案されてきたが，これらの方法を形式的に適用するだけでは地点数や次元の数が増えるにつれて計算時間と記憶容量が幾何級数的に増加するため，実用上の制限を伴なっている。そこで，地震波のシミュレーションを行う前に多数の地震波の成分から確率統計的に有意な部分を抽出し，地震波の構成要素の数を減らした後，シミュレートしようと試みた。多変量解析の1分野である因子分析は多数の標本変量に潜在している情報を見つけ，より少い特別な因子から元の標本変量を再構成しようとするものである。この因子分析の考え方を適用し，ここでは定常的な相互相関のあるランダム過程をシミュレートする手順を提案する。

2．因子分析モデルによる定常ランダム過程の表現

因子分析の基本的な考え方は正規分布をもつランダムなp次元変量ベクトル過程 $\mathbf{x}(t)$ がより少ない次数のq次元共通因子ベクトル $\mathbf{f}(t)$ とp次元特殊因子ベクトル $\mathbf{e}(t)$ の線型結合で表わされるとすることである。[1)]

$$\mathbf{x}(t) = A\mathbf{f}(t) + \mathbf{e}(t) \qquad (1)$$

ここで，Aは $(p \times q)$ 因子負荷行列または因子パターンと呼ばれる行列 $[a_{ij}]$ である。共通因子は簡単のためにここでは直交しているとし，また特殊因子は互いに無相関であるから，

$$E[\mathbf{f}\mathbf{f}^t] = I, \quad E[e_i f_k] = 0, \quad E[e_i e_j] = 0 \ (i \neq j) \qquad i,j = 1,2,\cdots p, \quad k = 1,2,\cdots q \qquad (2)$$

ここでIは単位行列，$E[\cdot]$ は平均，$(\cdot)^t$ は転置行列を示す。各要素 x_i が分散1に標準化されているとすると，$\mathbf{x}$ と共通因子で表わされる部分 $\mathbf{c}\,(=A\mathbf{f})$ の分散，共分散は次の関係をもつ。

$$E[\mathbf{x}\mathbf{x}^t] = R, \quad E[\mathbf{c}\mathbf{c}^t] = AA^t, \quad E[\mathbf{c}\mathbf{x}^t] = AA^t = R - B \qquad (3)$$

ここで，Rは相関行列，Bは独自性を示す対角行列である。Bの要素は共有性 h_i によって次式で与えられる。

$$b_{ii} = 1 - h_i, \quad h_i = \sum_{k=1}^{q} (a_{ik})^2 \qquad (4)$$

式(3)，(4)より明らかなように共有性は各要素について共通因子によって表わされる全体に対する比率を示し，独自性は共通因子では表わされない部分の比率を示す。

さて，因子負荷行列Aは正準因子分析法の手順に従えば相関行列Rからもとめることができる。正準因子分析法は標本変量 $\mathbf{x}$ と共通因子で表わされる部分 $\mathbf{c}\,(=A\mathbf{f})$ との相関が最大となるように因子負荷行列Aを決める方法である。このことは結局次の固有方程式に置き換えられる。

$$[B^{-1/2}(R-B)B^{-1/2} - \theta_i^2]\,\mathbf{g}_i = 0, \quad \theta_i^2 = \lambda_i^2/(1-\lambda_i^2) \quad (\lambda_i\text{は正準相関係数}) \qquad (5)$$

式(5)を解き，q個の固有値 θ_i^2 と固有ベクトル $\mathbf{g}_i$ がもとまれば，因子負荷行列Aは θ_i を対角要素とする対角行列 Θ と $\mathbf{g}_i$ を θ_i に対して並べて作られた $(p \times q)$ 行列Gを次式に代入してもとまる。

$$A = B^{1/2}\,G\,\Theta \qquad (6)$$

ところで，AとBは共に未知なので，図－1に示す様に式(4)，(5)，(6)の繰返し計算によって必要な精度まで収束計算する。このとき，通常Bの初期値として $B = (\mathrm{diag}\,(R^{-1}))^{-1}$ が使われる。

因子負荷行列Aがもとまると因子評点 $\mathbf{f}(t)$ は標本変量 $\mathbf{x}(t)$ との次に示す線型結合によって得られる。[2)]

$$\mathbf{f}(t) = W^t\mathbf{x}(t), \quad W = R^{-1}A\,(A^tR^{-1}A)^{-1/2} \qquad (7)$$

ここで，Wは $(p \times q)$ の重み行列である。また特殊因子 $\mathbf{e}(t)$ は次式によってもとまる。

$$\boldsymbol{e}(t) = \boldsymbol{x}(t) - A\boldsymbol{f}(t) \qquad (8)$$

3．標本変量のスペクトルと因子のスペクトルとの関連

標本変量の要素間の相互相関関数は，式(1)のように因子の線形結合で表わされるなら，

$$r_{xij}(\tau) = E[x_i(t)\,x_j(t+\tau)] = E[\{\textstyle\sum_k a_{ik} f_k(t) + e_i(t)\}\{\sum_\ell a_{j\ell} f_\ell(t+\tau) + e_j(t+\tau)\}]$$
$$= \textstyle\sum_k\sum_\ell a_{ik}\,a_{j\ell}\,E[f_k(t)\,f_\ell(t+\tau)] + \sum_k a_{ik}\,E[f_k(t)\,e_j(t+\tau)]$$
$$+ \textstyle\sum_\ell a_{j\ell}\,E[f_\ell(t+\tau)\,e_i(t)] + E[e_i(t)\,e_j(t+\tau)] \qquad (9)$$

となる。特殊因子 $\boldsymbol{e}(t)$ は各要素の特異な性質を示す。そこで，実用的には特殊因子の各要素は他の因子と定常的に独立であると仮定する。すなわち，

$$E[f_k(t)\,e_j(t+\tau)] = 0,\ E[f_\ell(t+\tau)\,e_i(t)] = 0,\ E[e_i(t)\,e_j(t+\tau)] = \delta_{ij}\,r_{eij}(\tau) \qquad (10)$$

ここで，δ_{ij} はクロネッカーの δ である。式(10)を(9)に代入すれば次の関係式が得られる。

$$R_x(\tau) = A R_f(\tau) A^t + R_e(\tau) \qquad (11)$$

そして，スペクトル密度関数の関係式は

$$S_x(\omega) = A S_f(\omega) A^t + S_e(\omega) \qquad (12)$$

となる。式(11)，(12)について，左辺の要素の数は $(P\times P)$，右辺は $(q\times q)$ である。したがって，式(10)の仮定を満たす場合，$P>q$ より相互相関またはクロススペクトルの求める要素数は因子分析モデルを使用することによって減らすことができる。

4．シミュレーションの計算手順

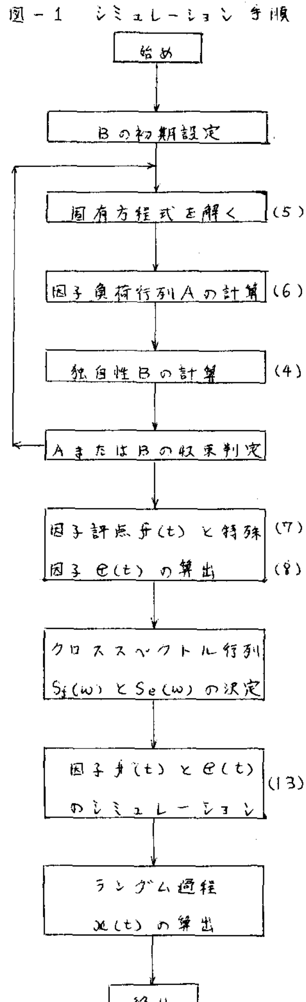
共通因子と特殊因子のスペクトル密度関数が与えられれば，既存の手法によって新たに各因子評点をシミュレートすることができる。[3] これを用いてもとのP次元変量ベクトル $\tilde{\boldsymbol{x}}(t)$ を

$$\tilde{\boldsymbol{x}}(t) = A\tilde{\boldsymbol{f}}(t) + \tilde{\boldsymbol{e}}(t) \qquad (13)$$

により構成する。ここで，~はシミュレートされた値であることを示す。

図－1はここで述べたシミュレーションの手順をまとめたものである。通常のシミュレーションの手順に因子負荷行列と因子評点を求める部分が付け加えられているが，それは計算量を減らすだけでなく，ランダム過程の相互関係を理解する手助けにもなる。

図－1　シミュレーション手順



5．あとがき

相互相関のあるランダム過程を因子負荷行列と因子評点の線型結合によって表わすことは多自由度振動系の振動を各振動モードの振動形とその振幅によって表わすことと類似している。両者の違いの1つは得られた因子負荷行列は行列の回転について不定であるという点である。ここで述べた手法は多次元の相関のあるランダム過程をシミュレートするのに有益であろう。しかし，ここに使われたいくつかの仮定はいろいろな実際の観測地震波によって検討されねばならない。

6．参考文献

1）浅野長一郎：因子分析法通論，共立出版(株)

2）芝祐順：因子分析法，東京大学出版会

3）星谷勝：確率論手法による振動解析，鹿島出版会