I-180　振動試験データより、系の質量・減衰・剛性係数を求める手法

(財) 電力中央研究所　正員。花田和史
(株) オメガプラン　正員　安藤幸治

1. 序

振動試験は対象とする構造物系の動的性状を把握することを目的として実施される。試験の結果から実施者が抽出する事項は、系のモード定数、物質定数、対象とする系への他系からの干渉の程度など多岐に亘る。実施の目的がこれらのいずれを解明することに重点を置くかによって、得られたデータの処理手法は若干異なろう。しかし試験は実施者が予じめ抱いている系のイメージを修正するためになされるものであり、その修正量を把握する意味では試験データの処理手法を統一的に扱いうる。

処理手法は、まず、目的とするパラメータによって、(a)モード定数（固有値、固有ベクトル、換算質量）、(b)プラント定数（系の質量、減衰、剛性係数）に2分される。また、誤差の評価によって、(1)振動方程式を成立させる、(2)観測値に同定値を一致させる、(3)最尤値を求める、の3種に分類される。さらに、プラント定数を同定する場合には、予じめ数学モデルの構造が決定されていなければならない。したがって、実施者が予じめ抱いている系のイメージが、(イ)モデルの構造に限定される場合、(ロ)モデル構造に各プラント定数を先験的に想定しうる場合、の2種が考えられる。(a)については既に1手法を提案しているので[*1]、ここでは(b)を対象に(1)-(イ)、(2)-(ロ)の手法について紹介する。

2. 計算の前提と計算例の概略

対称で非レーレー減衰をもつ系の運動方程式は、$\mathbb{M}\ddot{\mathbb{X}}+\mathbb{C}\dot{\mathbb{X}}+\mathbb{K}\mathbb{X}=\mathbb{F}$ と表わされる。ここに、$\mathbb{M}$、$\mathbb{C}$、$\mathbb{K}$はプラント定数であり、$\mathbb{F}$は外力ベクトル、$\mathbb{X}$は系の応答である。本系の$\mathbb{X}$に対応するr次固有ベクトルを$\mathbb{U}_r$（マトリクス$\mathbb{U}$）、その固有値をλ_r（マトリクスΛ）とすれば、系の伝達関数は、$\mathbb{G}=\mathbb{U}\,\mathrm{Diag}^{-1}(a)\left[\mathrm{Diag}(s)-\Lambda\right]^{-1}\mathbb{U}^T$と表わされる。ここにsはラプラス変数、$a_r=\mathbb{U}_r^T(2\lambda_r\mathbb{M}+\mathbb{C})\mathbb{U}_r$は系のr次換算質量である。

以下の計算例では、対象とする(真の)系を図1-(1)に示すような質点系を仮定する。図1-(1)モデルは、実物の代りとして採ったものであり、以後の解析精度検討に便ならしめるために、そのプラント定数が既知のものを選んだに過ぎない。以下の計算では数学モデルとして同様の質点系を想定した。ただし、その構造を図1-(2)～(5)に示すように、若干の変更を加えている。

3. 評価関数を固有方程式とし、モデル構造のみを与える手法（1-イ 対応）

本系の固有方程式は次のように与えられる。

$$\left.\begin{aligned}&(\lambda_r^2\mathbb{M}+\lambda_r\mathbb{C}+\mathbb{K})\mathbb{U}_r=\mathbb{0}\\&a_{sr}=\mathbb{U}_s^T(2\lambda_r\mathbb{M}+\mathbb{C})\mathbb{U}_r=\delta_{sr}\end{aligned}\right\}\quad(1)$$

求めるプラント定数ベクトルを $\mathcal{I}=(m_1,m_2,\cdots,c_1,c_2,\cdots,k_1,k_2\cdots)^T$ とおくと、上式は次のようになる。

$$\begin{bmatrix}\mathbb{H}_m(\lambda_r,\mathbb{U}_r), & \mathbb{H}_c(\lambda_r,\mathbb{U}_r), & \mathbb{H}_k(\lambda_r,\mathbb{U}_r)\\ \mathbb{A}_m(\lambda_r,\mathbb{U}_r,a_r), & \mathbb{A}_c(\lambda_r,\mathbb{U}_r,a_r), & \mathbb{0}\end{bmatrix}\mathcal{I}=\begin{Bmatrix}\mathbb{0}\\ \delta\end{Bmatrix}\qquad(2)$$

図1-(1)～(5)の構造に対して(2)式を適用し、入力として真の系のモード定数を用いれば、得られるプラント定数は極めて良い精度で真の系のそれに一致する。とくに真の系の構造を想定した(1)の場合には真の系のプラント定数と完全に一致する。最も精度の落ちる(5)の構造より同定されたモデルの、その固有値を表1に記す。固有ベクトルと固有値の精度はほぼ同レベルである。(以下、全てのプラント定数を比較する紙面がないので、同定されたプラント定数をもつ系の固有値で精度を示す。プラント定数と固有値の精度は同レベルとはみなされないが、傾向を良く表現している。）しかし、試験データより同定されるモード定数は、真の系のモード定数と

は若干のずれを生じている。測定誤差、同定誤差を考慮して、表1中のように得られるモード定数を(1)の構造に適用した場合でも、全くプラント定数を同定しえない。結果を表1に併記する。

4. 評価関数を観測値との差異とし、先験的モデルを与える手法（2-ロ対応）

先験的モデルのプラント定数の微小変化（$\Delta\mathbb{M},\Delta\mathbb{C},\Delta\mathbb{K}$）に対応するモード定数の変化は次式で表わされる。

$$\left.\begin{aligned}
\Delta\lambda_r &= -\mathbb{U}_r^T(\lambda_r^2\Delta\mathbb{M}+\lambda_r\Delta\mathbb{C}+\Delta\mathbb{K})\mathbb{U}_r \\
\Delta\mathbb{U}_r &= \sum_s \varepsilon_{sr}\mathbb{U}_r \\
\varepsilon_{sr} &= -\frac{1}{2}\mathbb{U}_r^T(2\lambda_r\Delta\mathbb{M}+\Delta\mathbb{C})\mathbb{U}_r \qquad (s=r) \\
&= -\frac{\mathbb{U}_s^T(\lambda_r^2\Delta\mathbb{M}+\lambda_r\Delta\mathbb{C}+\Delta\mathbb{K})\mathbb{U}_r}{\lambda_r-\lambda_s} \qquad (s\neq r)
\end{aligned}\right\} \quad (3)$$

(3)式によって、プラント定数の一次微小変化は、一次微小項の範囲において先験的モデルの換算質量を変化させず、かつ、モードの直交性を破壊しない。本手法では先験的モデルのモード定数と先に同定されたモード定数との差異を(3)式左辺の形に改めて等値し、先験的モデルのプラント定数の変化分を同定する。さらに、その結果を新しい先験値として収束を図っている。(1)と(5)に対応するモード定数を表1に併せて記す。本例は前述の同定されたモード定数を入力しているが、良く安定した同定値を示している。

5. 結

上述の両手法による結果の差異は、他の検討結果より主として先験的モデルの有無によって生じるものであり、評価関数の差異ではないようである。先験的モデルを用いる手法は、処理過程における安定性を容易に図りうる他に、従来よりの経験を処理に導入するとともに不計測点の取扱いに極めて便利である。

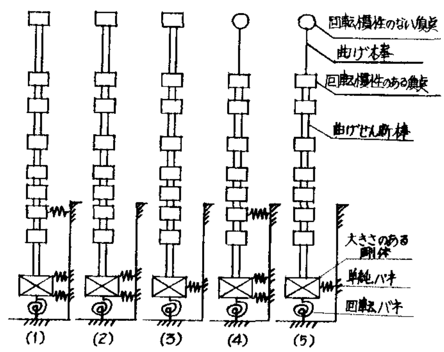

図1 真の系と想定された系の構造

本報告の例では対象系の自由度は18であるが、モード定数の同定には計測可能領域を20Hz以下と仮定しモード次数を6次までに制限した。したがって数学モデルを6自由度に縮限すれば、最小次元として唯一の解を得ることは可能である*2。しかし、設計への還元を考慮して物理的イメージを表現しやすいよう考慮した。

本手法は単に試験データの処理のみならず、FEMのような多自由度計算結果の処理にも有用であろう。今後、検討を進めていきたい。

表1 同定されたプラント定数を有する系の固有値

手法		1-イ				2-ロ				対象系		同定値		先験値	
対象構造		(5)		(1)		(1)		(5)							
		f Hz	h %	f	h	f	h	f	h	f	h	f	h	f	h
λ_r	1次	2.05	16.2	2.31	24.9	2.13	17.7	1.96	17.7	2.13	14.2	2.14	13.5	2.15	13.9
	2次	4.32	18.7	6.73	40.3	4.75	20.6	4.56	20.0	4.50	18.1	4.72	17.8	4.37	17.7
	3次	9.46	16.1	19.9	32.4	10.7	16.9	10.2	17.6	9.82	15.6	10.5	17.2	9.57	18.1
	4次	11.2	35.3	24.6	80.2	12.8	37.5	12.3	34.0	11.7	36.6	12.9	36.6	11.8	33.1
	5次	13.9	19.0	31.9	81.1	15.2	17.8	14.6	19.2	14.0	17.4	15.3	18.2	13.6	17.4
モード入力		真値		同定値		同定値		同定値							

6. 参考文献

(1) 花田和史 他　強制振動実験のデータ分析手法　電力中央研究所報告　377023.　1978.

(2) Potter, R etal.　ISA Conf. & Exhibit. New York oct. 1974.
Mass, Stiffness and Damping Matrices from Measured Modal Parameters

(3). Ibáñez, P.　UNCLA-ENG-7225 PhD Thesis UCLA 1972.
Identification of Dynamic Structural Models from Experimental Data