

長崎大学工学部 正員 〇高橋和雄  
(株) 川鉄々構工業 米倉真一

1. 緒言 柱や骨組構造物に周期的軸力が作用する場合、タンク内の液体が鉛直方向の振動を受けた場合のスロッシングおよび脈動流によるパイプの安定性などの係数励振不安定問題(動的安定問題)は Mathieu-Hill の方程式に支配される。係数励振不安定問題は工学上重要な問題であるために、その不安定領域の決定法に関する研究はこれまで相当詳しく行われているが、いまだに厳密解は提案されていない。ほとんどすべての問題が漸近法に基づく Han の方法および特性方程式の根を求める Bolotin の方法などの近似解法にしたがって解析されている。しかも、いずれの解法も十分条件のみを満足するもので、必要なすべての解を与えることは不可能である。著者らは連続体の非線形振動の振幅安定判別法として連立の Hill の方程式の固有値問題による解法を提案している。<sup>(2),(3)</sup> そこで同じ解法を係数励振不安定問題の不安定領域の決定に応用したところ、ほぼ十分な結果がえられたので、本講演会において報告するものである。

2. 解法 係数励振不安定問題の運動方程式の形は構造形式および負荷形式によって異なるが、いずれの場合を取扱っても同じであるので、ここでは Bolotin によって取扱われた問題を対象にする。運動方程式を時間に関する一般座標を用いて表わせば、次のような連立常微分方程式がえられる。<sup>(1)</sup>

$$\ddot{X} + 2\Omega \dot{X} + (IE - \alpha A)X - \varepsilon B \cos \theta t X = 0 \quad (1) \quad \text{ここに、}\alpha, \varepsilon, \theta: \text{パラメータ}$$

$\Omega$ : 対角行列,  $\Omega H$ : 減衰行列,  $IE$ : 単位行列,  $A$ ,  $B$ : 荷重の係数行列,  $X$ : 変位ベクトル  
減衰行列は直交性の仮定に基づいて対角化されているが、以下の解析では行列の積の交換則が成立する単位行列  $IE$  に変換できる場合を取扱う。すなわち減衰定数の大きさで各モードと一一定である。いま  $X = e^{-iHt} Y$  のように置き、 $e^{-iHt}$  が特異行列でないことを考慮すれば、 $\ddot{Y} + (IE - \Omega H^2 - \alpha A - \varepsilon B \cos \theta t)Y = 0$  (2) となる。

上式の解を次のように仮定する。 $Y = e^{i\lambda t} \left\{ \frac{1}{2} W_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (W_k \sin k\theta t + W_{-k} \cos k\theta t) \right\}$  (3)

ここに、 $\lambda$ : 未知な数,  $W_0, W_k, W_{-k}$ : ベクトル  
式(3)を式(2)に代入すれば、 $W_0, W_k, W_{-k}$ を求めるための同次方程式がえられる。

$$W X = 0 \quad (4) \quad \text{行列 } W \text{ の性質から式(4)は次のように書き改められる。}$$

$$W X = (W_0 - \lambda M_0 - \lambda^2 M_2) X = 0 \quad (5)$$

いま、 $Y = \lambda X$  とおけば、式(5)は二倍サイズの固有値問題となる。

$$\begin{bmatrix} 0 & IE \\ M_2^T M_0 & -M_2^T M_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X \\ Y \end{Bmatrix} = \lambda \begin{Bmatrix} X \\ Y \end{Bmatrix} \quad (6) \quad \text{式(6)の左辺の行列は実係数の非対称行列であるから、その}$$

固有値は一般に共役な複素数である。式(1)のパラメータである

荷重振幅および励振円振動数  $\theta$  に対して、算出された固有値の実数部から減衰定数  $\lambda$  を引いた値がすべて負ならば、式(3)の一般解に含まれる  $e^{(\lambda - \lambda_0)t}$  が時間とともに安定で、逆に一つでも正ならば  $e^{(\lambda - \lambda_0)t}$  が発散するために flutter 形の不安定という Liapunov の安定性の定義を用いて、直接系の安定・不安定を確かめることができる。

3. 適用例 (1) 1 自由度系の Mathieu の方程式  
本題の微分方程式は次のように与えられる。

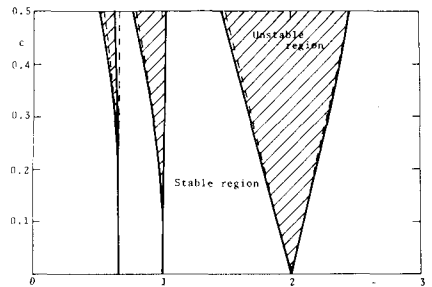


図-1

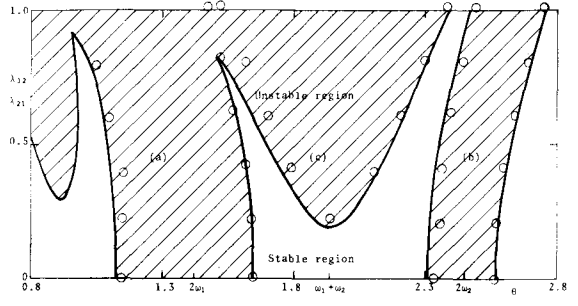


図-2 — theoretical, ○ analog computer results

$\lambda + \bar{\omega}^2(1-2\varepsilon\lambda^2)\lambda = 0$  (7) 式(7)は両端単純支持柱の動的安定問題の基礎式と同じである。固有振動数 $\bar{\omega}$ と荷重強度 $\varepsilon$ との関係をプロットすれば図-1の結果をうる。斜線部が不安定領域である。 $\bar{\omega}=2.0$ 付近の主不安定領域の他に、 $\bar{\omega}=1.0, 2/3$ に生ずる第2, 3の副不安定領域が同時にえられている。本法の収束はきわめて速くフーリエ級数の項数は3項で十分である。点線はFloquetの理論を用いた数値解であるが本法とよく一致している。

(2) W. Szemplinika-Stupnickaの問題 W. Szemplinika-Stupnickaが2自由度系の係数励振不安定問題の結合共振を調和バランス法を応用して解析する際に用いた係数励振モデルに対する安定判別結果を図-2に示す。 $2\omega_1$ ,  $2\omega_2$ 付近に生ずる各自由度の単独共振の他に、 $\omega_1 + \omega_2$ 付近に生ずる和形の結合共振の不安定領域が同時にえられている。比較対照のために analog-computer による simulation 結果をプロットすれば、図中の○印に示すとおりである。本法と simulation の結果はよく一致している。本法によって Hsu の漸進法のようなきわめて多くの節目を要することなく、必要かつ十分な解がえられている。

### (3) はりの曲げおよびねじりの動的安定問題

静荷重および周期的変動荷重を受けるはりの動的安定問題の不安定領域を図-3に示す。高い方の内振動数 $\omega_2$ がねじり振動に対応し、低い方の内振動数 $\omega_1$ が曲げ振動に対応するものである。本例では単独共振よりも結合共振の方が不安定領域が広い結果となっている。また、減衰の影響は不安定領域の幅が狭い領域を安定に変える。

### (4) 保存・従動周期的変動荷重を受ける片持ちはりの動的安定問題

片持ちはりを3自由度系で近似した場合の保存および従動周期的変動荷重に対する不安定領域を図-4, 5に示す。表-1には各ケースの現象の分類と不安定領域の $\varepsilon=1.0$ に対する周振数領域が示されている。保存荷重の方が従動荷重よりも不安定領域の幅が広いことおよび保存荷重の場合には和形の結合共振が現われやすく、従動荷重の場合には差形の結合共振のみが現われるなど負荷方法によって生ずる現象が異なる。

4. 結論 以上によって固有値問題によって係数励振振動の不安定領域がすべて求められることが立証された。

参考文献 1) V.V. Bolotin: The Dynamic Stability of Elastic Systems (1964), 2) K. Takahashi: Journal of Sound and Vibration, Vol. 66, No. 4 (1979), 3) 高橋・河原・山辺: 工学会論文報告集, 第293号 (1980), 4) W. Szemplinika-Stupnicka: Journal of Sound Vibration, Vol. 53, No. 3 (1978)

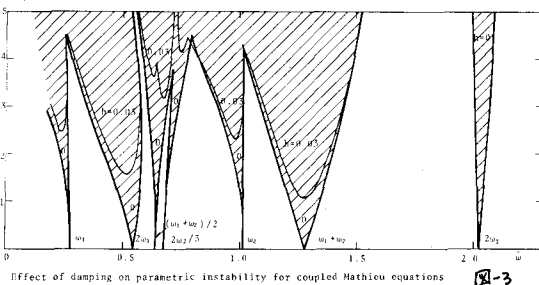


図-3

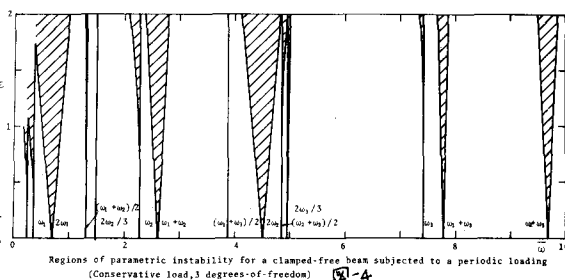


図-4

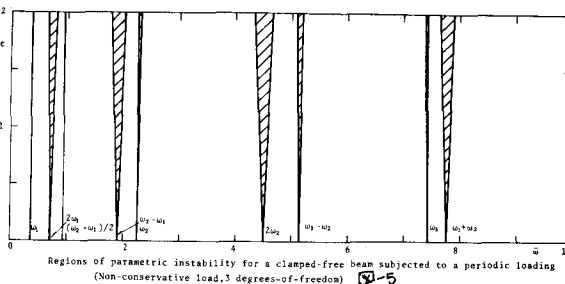


図-5

表-1 Regions of parametric instability for a clamped-free beam subjected to a periodic loading

|                                         | Frequency                 | Conservative load | Non-conservative load |
|-----------------------------------------|---------------------------|-------------------|-----------------------|
| Simple resonance                        | $2\omega_1$               | 0.52-0.86         | 0.68-0.75             |
|                                         | $\omega_1$                | 0.27-0.37         | 0.36                  |
|                                         | $2\omega_2$               | 4.32-4.70         | 4.43-4.60             |
|                                         | $\omega_2$                | 2.21-2.27         | 2.25-2.27             |
|                                         | $2\omega_2/3$             | 1.50              |                       |
| Combination resonance (sum type)        | $2\omega_3$               | 14.63-15.06       | 14.75-14.94           |
|                                         | $\omega_3$                | 7.40-7.43         | 7.40-7.43             |
|                                         | $2\omega_3/3$             | 4.94              |                       |
|                                         | $\omega_1 + \omega_2$     | 2.50-2.72         |                       |
|                                         | $(\omega_1 + \omega_2)/2$ | 1.31              |                       |
| Combination resonance (difference type) | $\omega_1 + \omega_3$     | 7.72-7.83         | 7.71-7.85             |
|                                         | $(\omega_1 + \omega_3)/2$ | 3.88-3.90         |                       |
|                                         | $\omega_2 + \omega_3$     | 9.53-9.77         |                       |
|                                         | $(\omega_2 + \omega_3)/2$ | 4.84-4.87         |                       |
|                                         | $\omega_2 - \omega_1$     |                   | 1.83-1.97             |
|                                         | $(\omega_2 - \omega_1)/2$ |                   | 0.94-0.96             |
|                                         | $\omega_3 - \omega_2$     |                   | 5.14-5.19             |
|                                         | $(\omega_3 - \omega_2)/2$ |                   |                       |