

九州産業大学工学部 正 員 吉村 健
同上 学生員 〇梅崎秀明
有明工業高等専門学校 正 員 吉村虎蔵

1. まえがき 本研究では、まず、ガラーキン法により、変断面単純梁に対する固有値の近似解析を行ない、次に、この近似解を用いて、結合法⁽¹⁾による変断面連続梁の固有値解析を行なった。その結果を以下に記す。

2. 変断面単純梁の固有値解析

断面2次元 $\xi-x$ ト
が連続関数で与えられる変断面単純梁(図-1)の固有値の近似解析を行なう。この梁の曲げ振動の微分方程式を、

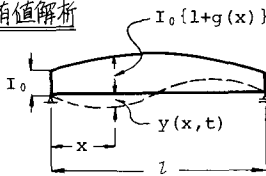


図-1

$$\frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} + \frac{E}{\rho} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left\{ I(x) \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} \right\} = 0 \quad (1)$$

で表わす。ここに、 $y(x, t)$ と $I(x) = I_0[1+g(x)]$ は、それぞれ、点 x における梁のたわみと断面2次元 $\xi-x$ トであり、 E はヤング係数、 t は時間、 ρ (=一定)は単位

スパン長あたりの質量である。この梁の n 次の固有円振動数 ω_n を次式で表わす。

$$\omega_n = \left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 \sqrt{\frac{EI_0}{\rho}} \sqrt{\lambda_n} \quad (2)$$

後述のように、 n 次の固有振動モード $y_n(x)$ のフーリエ展開におけるフーリエ係数では、第 n 項 A_{nn} 近傍の数項(3~5項)が卓越する。そこで、次のように、卓越項のみの和で $y_n(x)$ を近似することにする。

$$y_n(x) = \sum_{j=n-R}^{n+L} A_{jn} \sin \frac{j\pi x}{l} \quad (3)$$

この $y_n(x, t) = y_n(x) \cdot \sin \omega_n t$ を式(1)に代入し、これに $\sin j\pi x/l$ ($j=n-R, \dots, n, \dots, n+L$)をかけて0から l まで積分すると、

$$(\bar{F}_n - \lambda_n \Pi) Q_n = 0 \quad (4)$$

を得る。 n 次の固有振動に関する振動数方程式は、式(4)の係数行列式をゼロとおいた式で与えられる。

特に、断面変化が小さい場合($g(x) \ll 1$)、上記解法をさらに簡略化することが出来る。すなわち、前述の積分した式において $|A_{nn}| \gg |A_{jn}|$ であることから、 A_{nn} 項のみをとると、 λ_n と A_{in}/A_{nn} がそれぞれ、次式で与えられる。

$$\lambda_n = 1 + \frac{\rho}{E} \left(1 + \frac{3}{m^2 \pi^2} \right) \quad (5)$$

$$\frac{A_{in}}{A_{nn}} = \frac{8\alpha i^3}{n\pi^2(m+i)^2(m-i)^2 \{ (i/n)^4 - \lambda_n \}} \quad (6)$$

表-1. 本法と集中質量法による固有値 λ_n の比

a	$\frac{I(0.5)}{I(0)}$	1st	2nd	3rd	4th
-3.6	0.1	1.0014	1.0031	1.0030	1.0040
1	1.25	1.0006*	1.0010*	1.0012*	1.0013*
2	1.5	1.0018	1.0028	1.0035	1.0039
20	6	1.0019	1.0044	1.0063	1.0080
36	10	1.0030	1.0072	1.0106	1.0138

a		1st		2nd		3rd			4th		
		A_{31}/A_{11}	A_{51}/A_{11}	A_{42}/A_{22}	A_{62}/A_{22}	A_{13}/A_{33}	A_{53}/A_{33}	A_{73}/A_{33}	A_{24}/A_{44}	A_{64}/A_{44}	A_{84}/A_{44}
-3.6	proposed	-0.0461	0.0048	-0.1253	0.0152	0.0478	-0.2019	0.0290	0.1324	-0.2758	0.0461
	lumped mass	-0.0465	0.0055	-0.1271	0.0185	0.0477	-0.2053	0.0356	0.1326	-0.2815	0.0574
1	proposed	0.0043*	0.0003*	0.0122*	0.0011*	-0.0036*	0.0202*	0.0020*	-0.0102*	0.0281*	0.0030
	lumped mass	0.0037	0.0003	0.0104	0.0011	-0.0037	0.0171	0.0022	-0.0104	0.0234	0.0032
2	proposed	0.0086*	0.0006*	0.0246*	0.0021*	-0.0063*	0.0414*	0.0041*	-0.0176*	0.0588*	0.0061
	lumped mass	0.0065	0.0006	0.0184	0.0023	-0.0065	0.0303	0.0044	-0.0185	0.0416	0.0066
20	proposed	0.0210	0.0029	0.0604	0.0110	-0.0218	0.0998	0.0212	-0.0638	0.1373	0.0324
	lumped mass	0.0220	0.0036	0.0640	0.0139	-0.0224	0.1067	0.0273	-0.0663	0.1481	0.0424
36	proposed	0.0238	0.0035	0.0684	0.0131	-0.0249	0.1132	0.0253	-0.0734	0.1557	0.0388
	lumped mass	0.0254	0.0046	0.0743	0.0178	-0.0280	0.1247	0.0353	-0.0779	0.1738	0.0553

表-2. 本法と集中質量法による固有振動モードのフーリエ係数

ただし、 $g(x) = Q \frac{x}{L} (1 - \frac{x}{L})$ とした。この一項近似の手法は、質量分布が一樣でない弦に対する、文献(2)の固有値の近似解法と同一である。

一例として、上記 $g(x)$ において、 $Q = -3.6, 1, 2, 20, 36$ ($0.1 \leq I(42)/I_0 \leq 10$) について行なった数値計算結果を表-1、表-2に示す。比較のため、表には集中質量法(20質点系)による結果も記してある。また、表中*で示される結果は、上記一項近似式を用いた結果である。表より、固有円振動数、固有振動モード共にきわめて良い近似解が得られることがわかる。

3. 変断面連続梁の固有値解法 次に、2で得られた単純梁の固有値の近似解を用い、結合法によって、図-2に示す変断面連続梁の固有値解法を行なう。ここでは、図示するように、連続梁を3つの単純梁A、B、Cに切断する。そして、これらの梁の支点2、3に周期的モーメント荷重を加え、支点2、3における力のつり合い条件式と変形の適合条件式を用いて、もとの連続梁に対する振動数方程式を得ることにする。

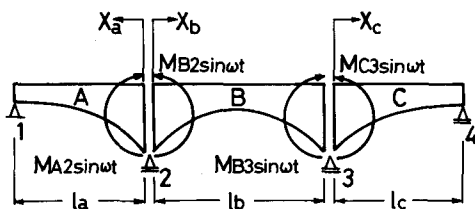


図-2

文献(1)に記したように、単純梁の点 x_i に周期的モーメント荷重 $M_{ij} \sin \omega t$ を加えたときの点 x_i におけるたわみ角 $\theta(x_i) \sin \omega t$ は、 $\Phi_m(x)$ を正規化モードとすると、

$$\begin{aligned} \theta(x_i) &= \sum_m \Omega_m \Phi'_m(x_i) \Phi'_m(x_j) M_{ij} \\ &\equiv f_{ij}(w) M_{ij} \end{aligned} \quad (7)$$

で与えられる。ここに、 $\Omega_m = \frac{1}{\omega_m^2 - \omega^2}$ である。

いま、図-2の3つの梁A、B、Cの支点2、3に、周期的モーメント荷重 MA_2, MB_2, MB_3, MC_3 を加えると、支点2、3におけるそれぞれの梁のたわみ角は、

$$\left. \begin{aligned} \theta_A(0) &= f_{A22}(w) MA_2 \\ \theta_B(0) &= f_{B22}(w) MB_2 + f_{B23}(w) MB_3 \\ \theta_B(l_b) &= f_{B32}(w) MB_2 + f_{B33}(w) MB_3 \\ \theta_C(0) &= f_{C33}(w) MC_3 \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

で与えられる。

ここで、式(8)を変形の適合条件式

$$\left. \begin{aligned} \theta_A(0) &= \theta_B(0) \\ \theta_B(l_b) &= \theta_C(0) \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

に代入し、支点2、3における力のつり合い条件式

$$\left. \begin{aligned} M_{A2} + M_{B2} &= 0 \\ M_{B3} + M_{C3} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

を用いると、次式が得られる。

$$\begin{bmatrix} f_{A22}(w) + f_{B22}(w) & f_{B23}(w) \\ f_{B32}(w) & f_{B33}(w) + f_{C33}(w) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_{B2} \\ M_{B3} \end{bmatrix} = 0 \quad (11)$$

連続梁の振動数方程式は、式(11)の係数行列式をゼロとおいた式で与えられる。

ところで、式(8)の級数は収束が悪いため、高次の $\omega_m, \Phi_m(x)$ が必要となる。そこで文献(3)に記した手法、すなわち、

$$\begin{aligned} \theta(x_i) &= \sum_m \left[\frac{1}{\omega_m^2} + \frac{\omega^2}{\omega_m^2(\omega_m^2 - \omega^2)} \right] \Phi'_m(x_i) \Phi'_m(x_j) M_{ij} \\ &\equiv \theta_s M_{ij} + \theta(w) \Phi'_m(x_i) \Phi'_m(x_j) M_{ij} \end{aligned} \quad (12)$$

のように、静的たわみ角(右辺第1項)と、動的増加たわみ角(右辺第2項)に分解すれば、収束を早めることができる。

4. おまけ ガラーキン法と結合法を併用し、断面2次モーメントが連続関数で与えられる変断面梁の固有値の近似解析を行なった。その結果、単純梁についてはきわめて良い近似解が得られることがわかった。また、連続梁についても良い近似解が得られているが、その詳細は当日発表の予定である。

謝辞 本研究を行なうにあたり、辻産業株式会社の中島城二君と九州産業大学の田中宏治君の援助をいただいたことを記し、謝意を表したい。

参考文献

- (1) 平井一男；結合法による弾性支承を有する連続ばりの動的解析，土木学会論文報告集，第104号，551
- (2) 坪井忠二；振動論，現代工学社(復刻版)，551
- (3) I. Hirai & T. Yoshimura : EIGENVALUE ANALYSIS OF STRUCTURES BY FOLDING FORCE, J. E.M.Div., Proc. ASCE, EM 6, 1970.