I-175　幾何学的非線形性に基づくケーブルの面内・面外連成運動

東京大学　正員　山口宏樹
横浜国立大学　正員　宮田利雄
東京大学　正員　伊藤学

1．はじめに

重力場にあるケーブルはサグを有するがために初期形状が平面を作り，従ってその動力学的特性も面内運動，面外運動として分けて考え得る。特に線形振動として扱い得るような微小振動を考えれば，ケーブル面内の水平振動と鉛直振動は連成するものの，面内振動と面外振動とは完全に分離される。[1] しかし，ケーブルは圧縮，および曲げに抵抗し得ないフレキシブルな部材であり，外力によって自由にその形状を変えることができるため，本質的に幾何学的非線形性を有するといえる。その非線形性が故，面内外力によっても面外振動が，面外外力によっても面内振動が励起される場合がある。本報告は，このケーブルの幾何学的非線形性に基づく面内・面外連成運動を，支配方程式からの考察，および数値計算などにより明らかにしたものである。

2．面内外力による面外連成運動

面内外力により面内に運動しているときの面外振動に関する支配方程式を，面外変位についての非線形項のみを無視して求めると次のようになる。

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}-\frac{\partial}{\partial s_e}\left[\left\{c_0^2\frac{1}{x_e}+c_1^2\left(\underline{x_e'\frac{\partial u}{\partial s_e}+y_e'\frac{\partial v}{\partial s_e}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial s_e}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial s_e}\right)^2}\right)\right\}\frac{\partial w}{\partial s_e}\right]=0 \qquad (1)$$

ここで，u, v, wはそれぞれ，面内水平変位，面内鉛直変位，面外変位であり，$(x_e, y_e, 0)$は初期形状，s_eは初期状態のケーブルに沿う長さで定義する曲線座標である。またc_0，c_1は弦の横波，縦波の伝播速度である。なお，ケーブルは完全可撓性を有するものとし，伸張性を考慮している。式(1)において，面内変位u，vは面外変位wの係数として面外運動に関係するから，u，vが周期的に変動する場合にはその係数が周期関数となって面外運動のパラメトリック励振の可能性のあることがわかる。ケーブルの模型実験等でよく観察される面内周期外力による面外連成応答[2]はまさにこの不安定現象に相当する。[3]

3．面外外力による面内連成運動

面内運動にのみ着目し，面内変位u，vについての非線形項を無視して線形化すれば，次の支配方程式を得る。

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{\partial}{\partial s_e}\left[\left\{c_0^2\frac{1}{x_e}+c_1^2\left(x_e'^2+\underline{\left(\frac{\partial w}{\partial s_e}\right)^2}\right)\right\}\frac{\partial u}{\partial s_e}+c_1^2x_e'y_e'\frac{\partial v}{\partial s_e}\right]=\frac{1}{2}c_1^2\frac{\partial}{\partial s_e}\left\{\underline{\left(\frac{\partial w}{\partial s_e}\right)^2x_e'}\right\} \qquad (2.a)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}-\frac{\partial}{\partial s_e}\left[\left\{c_0^2\frac{1}{x_e}+c_1^2\left(y_e'^2+\underline{\left(\frac{\partial w}{\partial s_e}\right)^2}\right)\right\}\frac{\partial v}{\partial s_e}+c_1^2x_e'y_e'\frac{\partial u}{\partial s_e}\right]=\frac{1}{2}c_1^2\frac{\partial}{\partial s_e}\left\{\underline{\left(\frac{\partial w}{\partial s_e}\right)^2y_e'}\right\} \qquad (2.b)$$

これは面外変位wが存在するときの面内線形自由振動を表わしているが，ここで注目すべきことは右辺に外力項として面外変位の2次項が現われることである。つまり，面内方向に外力が作用していなくとも面外振動によってこのような付加的外力が作用するわけで，これによって微小であるにせよ，面内振動が必ず励起される。しかもこの付加的外力項が面外変形の2次項であるため，面外変位が振動数ωで変動する場合には静的外力，および2ωの振動数を有する動的外力が面内方向に作用することになり，2ωが面内固有振動数に一致し，しかも面内，面外の固有モードが似ている場合に面内運動の共振を引き起こすことになる。

図-1は面外対称1次固有振動数と同じ振動数を有する分布正弦波外力を面外方向に作用させた場合の非線形応答を数値計算によって求めたものである。図にはケーブル中央点の変位応答（実線；面外応答，点線；面内応答，変位はスパン長で無次元化している）を6種のサグ比γについて示してある。これを見ると，面外変位と同程度に面内変位が生じているのはサグ比$\gamma=0.026$の場合だけであるが，それに近い$\gamma=0.02, 0.03, 0.04$の場合に

も有意な面外変位が生じている。ケーブルの3次元線形自由振動特性として，面内の対称1次固有振動数と逆対称1次固有振動数とが一致するケーブルでは，面内1次の固有振動数が面外1次の固有振動数の2倍となり，しかもそれぞれの固有モード形にあまり差異のないことがわかっている[1]が，図のγ=0.026の計算例はこの場合に相当し，面外外力によって面内共振を起している例といえる。これに対し，γ=0.01，0.1の場合には面内変位は生じているものの面外変位に比較すれば大変に小さく，無視できるものである。このことはケーブル中央点の軸直角面内におけるリサージュ図(図-2)を見れば一層明らかとなる。従って，面外外力によるケーブルの応答を考える場合，微小振動であっても面内の連成運動を考慮する必要のある場合が存在するといえる。なお，図-2においてγ=0.026を境にリサージュ図の形状が変化している(γ≦0.026で上に凸，γ>0.026で下に凸)ことは興味深いが，これは面外応答波形と面内応答波形との位相差の差異によるもので，やはりサグを有するケーブル固有の動的応答特性といえよう。

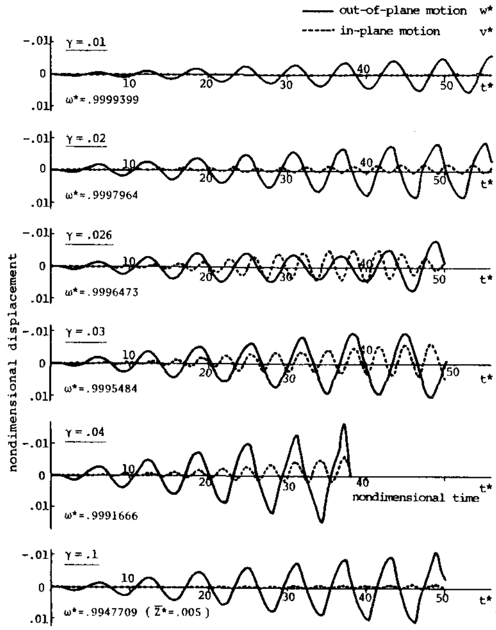

図-1 面外外力によるケーブル中央点の時間応答

4. まとめ

有限変位を対象としたケーブルの非線形振動を考える場合には面内運動と面外運動とが連成し，3次元振動としての扱いが必要となるものの，線形振動として扱い得る微小振動においては，一般にはそれらを独立に扱ってよい[1]。ただし微小振動問題においても面外に運動しているケーブルの面内振動に着目するならば，面外運動が付加的外力項として作用するため，微小であるにせよ，面内振動が生じ，それが有意な振幅にまで発達し得るようなケーブルがあるサグ比の範囲で存在する。一方，面内外力の作用しているケーブルの面外運動は面内運動が外力として働くことはないものの，係数として関わるため，パラメトリック加振の可能性がある。

いずれにせよ，幾何学的非線形性に基づくケーブルの非線形動特性は外力の方向とは異なる方向の運動が励起される面内面外連成運動という現象で代表されるといえるが，これらの特性はケーブルがサグを有するがための特性であり，サグ比が重要なパラメーターとなっている。

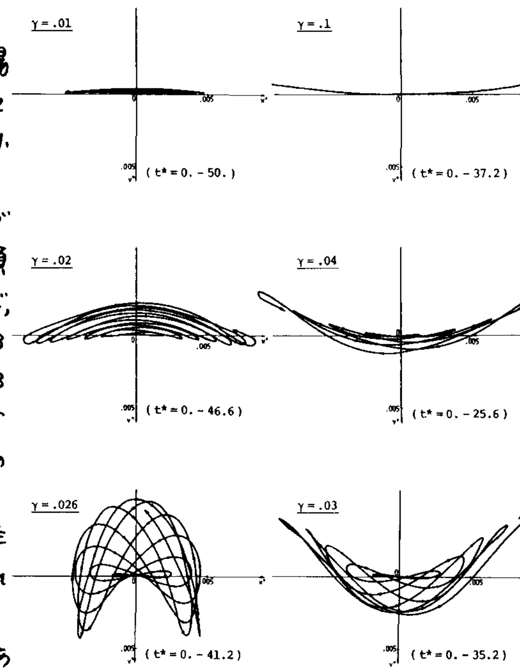

図-2 面外外力による時間応答のリサージュ図(中央点)

（参考文献）

1) 山口，伊藤：単一ケーブルの三次元線形自由振動，土木学会論文報告集，第286号，1979年6月.

2) 例えば Davenport & Steels : Dynamic behavior of massive guy cables, ASCE, Vol.91, No.ST2, Apr., 1965.

3) 山口，宮田，伊藤：ケーブル系の非線形動的応答における一挙動，第24回構造工学シンポジウム論文集，1978年2月.