

山口大学 正員 會田 忠義
" 学生 小松 茂生

ま え が き 橋上を走行する蒸気機関車の車輪の不均衡重錘による揺打作用はもちろん、蒸気機関車でなくとも、一般の鉄道車両のバネ作用も含め、走行にともなう軌道におよぼす周期的外力は橋面に垂直に作用しながら移動する。これらは橋のねじり回転にともなう、その作用方向がねじり回転に追従する成分をもつことが考えられる。磁力で浮上し、高速走行するリニアモーターカーにおいても、このことが予想される。周期的従動荷重の「はり」に与える影響は、「はり」のねじり剛性が大きい場合は小さいことが予想されるが、その程度が問題である。これらの走行荷重を受ける「はり」の問題をモデル化して、移動する周期的従動荷重を受ける「はり」の問題に置換し、その動的挙動を調査するものである。本研究では、荷重の作用方向の変化のみに変形の影響を考慮し、その他は微小変形理論に基づいている。応答解析は質量をもたない連行走行荷重について行い、Hill型の擾乱方程式により擾乱変位の挙動を求め安定性を検討する。これにはBolotinの近似解法が適用する。

運動方程式 Fig. 1に示すようにy方向に荷重が作用するとき、荷重が「はり」のねじり回転方向にのみ従動すると仮定すると、荷重 $(0, g_y, 0)$ は $(-g_y\theta, g_y, 0)$ に変化し、運動方程式は次式で表わされる。

$$\left. \begin{aligned} m(\ddot{U}_s + y_s \ddot{\theta}) + EI_{xx} U_s'' + g_y \theta &= 0 \\ m(\ddot{V}_s - x_s \ddot{\theta}) + EI_{yy} V_s'' - g_y &= 0 \\ \mu I_{ps} \ddot{\theta} + m(y_s \ddot{U}_s - x_s \ddot{V}_s) + EI_{\omega}'' \theta - GK \theta'' - g_y(e_x - x_s) - g_y \theta (e_y - y_s) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

ここで、 m ：「はり」の単位長さ質量、 μI_{ps} ：「はり」の慣性モーメント、 EI_{xx} 、 EI_{yy} ：曲げ剛性、 EI_{ω} ：曲げねじり剛性、 GK ：ねじり剛性、 g_y は荷重の走行速度を V 、荷重間隔を a 、荷重振動数を ω とすると、

$$g_y = \begin{cases} P \cos \omega t \sum_{n=1}^{\infty} \delta(z - (vt + (n-1)a)) & 0 \leq t < (l - (n-1)a)/v \\ P \cos \omega t \sum_{n=1}^{\infty} \delta(z - (vt + (n-1)a)) & (l - (n-1)a)/v \leq t \leq l/v \end{cases} \quad (2)$$

ただし、荷重振動周期 $T = 2\pi/\omega$ は荷重移動周期 $T = l/v$ の整数分の1である。

すなわち、 $\omega = d\omega_0$ 、 $\omega_0 = 2\pi V/a$ 、 d ：整数。式中、 δ ：Diracの δ 関数。

運動方程式(1)の近似解に式(2)を代入し、これに式(1)に代入整理すると、式(4)となる。 P_R 、 σ_R 、 τ_R は時間の未知関数、 U_{sR} 、 V_{sR} は

「はり」の曲げ振動の各次の固有関数、 θ_R はねじり

振動の各次の固有関数である。

$$\begin{aligned} \ddot{P}_R + y_s \ddot{\tau}_R + \omega_{sR}^2 P_R + \frac{ZP}{2m} \sum_{i=1}^{\infty} f_{Ri}(t) \tau_i &= 0 \\ \ddot{\sigma}_R - x_s \ddot{\tau}_R + \omega_{\sigma R}^2 \sigma_R - \frac{ZP}{2m} g_R(t) &= 0 \\ \ddot{\tau}_R + \frac{m}{\mu I_{ps}} (y_s \ddot{P}_R - x_s \ddot{\sigma}_R) + \omega_{\theta R}^2 \tau_R \\ + \frac{ZP(e_y - y_s)}{\mu I_{ps} l} \sum_{i=1}^{\infty} f_{Ri}(t) \tau_i - \frac{ZP(e_x - x_s)}{\mu I_{ps} l} g_R(t) &= 0 \end{aligned} \quad (4)$$

ω_{sR} 、 $\omega_{\sigma R}$ は各次の曲げ固有振動数、 $\omega_{\theta R}$ は各次のねじり固有振動数であり、単純ばりの場合

$$f_{Ri} = \int_0^l g_y U_{sR} U_{si} dz, \quad g_R = \int_0^l g_y U_{sR} dz$$

である。

Fig. 2

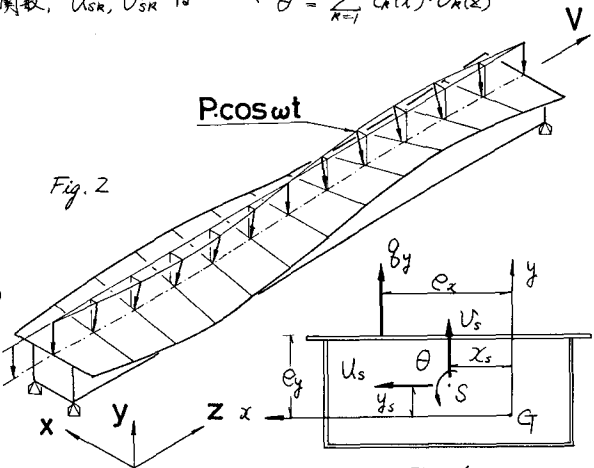


Fig. 1

式(4)は無限連立方程式であるが、式(3)を N 項からなる有限級数に近似するとき、式(4)は次のようにマトリックス表示される。

$$A\ddot{f} + B\dot{f} + PCf + Pd = 0 \quad (5), \quad f = \{f_1, \dots, f_N, \dot{f}_1, \dots, \dot{f}_N, \ddot{f}_1, \dots, \ddot{f}_N\}^T \quad (6)$$

ここで、 d は式(4)の荷重項を表わす。 B は対角線に ω_{in} , ω_{or} , ω_{on} を有するマトリックスであり、 C は式(4)より明らかなように、周期 $T = 9\mu$ をもつ周期関数である。

擾乱方程式と境界振動数方程式 ある運行に走行従動荷を受けて定常振動(走事解 f)に(2)の状態に、微小擾乱($\bar{f}$)を与え、擾乱変位の時間的経過より安定・不安定を判定するとき、擾乱状態の解 $\bar{F} = \bar{f} + \bar{\dot{f}} + \bar{\ddot{f}}$ を式(5)に代入整理することより、次の擾乱方程式が得られる。

$$A\ddot{\bar{f}} + (B + PC(t))\dot{\bar{f}} = 0 \quad (7)$$

ここで、式(4)中の f_{pi} を周期 $T = 9\mu$ をもつFourier級数(8)に展開するとき、式(7)は式(9)になる。

$$f_{pi} = \frac{1}{2}a_{0pi} + \sum_{p=1}^{\infty} (a_{ppi} \cos p\omega_0 t + b_{ppi} \sin p\omega_0 t) \quad (8)$$

$$A\ddot{\bar{f}} + B\dot{\bar{f}} + P \left\{ C_0 + \sum_{p=1}^{\infty} (C_{1p} \cos p\omega_0 t + C_{2p} \sin p\omega_0 t) \right\} \bar{f} = 0 \quad (9)$$

式(9)はHill方程式である。この方程式の解について、外力の周期と同じか、または2倍の周期をもつ周期解が安定領域と不安定領域を区分することが知られている。

今、外力の周期 $T = 9\mu$ の2倍の周期をもつ周期解を $\bar{f} = \sum_{s=1,2,4}^{\infty} (a_s \cos \frac{1}{2}s\omega_0 t + b_s \sin \frac{1}{2}s\omega_0 t) \quad (10)$ とするとき、これを式(9)に代入整理するとき、次の条件式が得られる。

$$-\frac{\eta^2}{4}\omega_0^2 A a_\eta + B a_\eta + P C_0 a_\eta + \frac{1}{2}P \sum_{p=1}^{\infty} \{ (C_{1p} a_{2p-\eta} + C_{2p} b_{2p-\eta}) + (C_{1p} a_{2p+\eta} + C_{2p} b_{2p+\eta}) + (C_{1p} a_{-2p+\eta} - C_{2p} b_{-2p+\eta}) + (C_{1p} a_{-2p-\eta} - C_{2p} b_{-2p-\eta}) \} = 0 \quad (11)$$

$$-\frac{\eta^2}{4}\omega_0^2 A b_\eta + B b_\eta + P C_0 b_\eta + \frac{1}{2}P \sum_{p=1}^{\infty} \{ (C_{2p} a_{2p-\eta} - C_{1p} b_{2p-\eta}) - (C_{2p} a_{2p+\eta} - C_{1p} b_{2p+\eta}) + (C_{2p} a_{-2p+\eta} + C_{1p} b_{-2p+\eta}) - (C_{2p} a_{-2p-\eta} + C_{1p} b_{-2p-\eta}) \} = 0 \quad (12)$$

$\eta = 1, 3, 5, \dots$

a_η と b_η ($\eta = 1, 3, 5, \dots$) が存在するための条件式(13)が式(11), (12)より得られる。

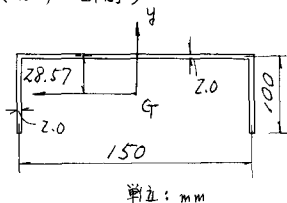
$$\left| -\frac{1}{4}\omega_0^2 [A]_1 + [B]_1 + \frac{1}{2}P[C]_1 \right| = 0 \quad (13)$$

上式が第1不安定領域の境界振動数方程式である。特に、一定の走行速度 V と荷重振動数 ω をもつ荷重の臨界値 P_{cr} を求めるには、 V より ω_0 を計算して $\left| \frac{1}{2} \left(-\frac{\omega_0^2}{4} [A]_1 + [B]_1 \right)^T [C]_1 + \frac{1}{P_{cr}} [E] \right| = 0$ 後に、式(14)の固有問題とすればよい。

解析例 下図に示す構型ばりの不安定領域を求め

Fig. 3に表わす。

(はり断面)



$$l = 200.0 \text{ cm}$$

$$c_y = 2.957 \text{ cm}$$

$$y_s = 6.857 \text{ cm}$$

$$c_x = x_s = 0$$

$$E = 7.1 \times 10^4 \text{ kg/cm}^2$$

$$G = 2.762 \times 10^5 \text{ kg/cm}^2$$

$$\mu = 1.9357 \text{ kg} \cdot \text{sec}^2 / \text{cm}^2$$

(荷重)

荷重数 $n = 2$, 荷重振動数 $\omega = 0.0$

荷重間隔 $a = 125.0 \text{ cm}$

Fig. 3

