

熊本大学 正員 山尾敏秀
 " " 崎元達郎
 建設省 " 菊池良介

1) まえがき； 立体構造物を構成する部材は、一般に圧縮、曲げおよびねじりの組合せ応力を受けるが、弾塑性解析や弾塑性座屈解析を行うためには、そのような応力を受けた時の弾塑性部材の剛性を明確にする必要がある。従来、ねじり挙動の解析に関する研究は数多くなされていて、複雑な構造物の非線形解析に応用できる形で、弾塑性ねじり剛性は明確に評価されるに至っていない。本研究では、薄肉弹性ばり理論を基礎に、実験研究を行なって得られた知識を導入しながら、応力表示の接線剛性マトリックスを導き、これを増分的に解くことにより、薄肉開断面を有する三次元骨組構造物の合理的な非線形解析法を開発した。ここでは、説明の概略と、若干の数値計算例について報告する。

2) 解析上の仮定： i) 骨組は理想的な硬化型弾塑性材料でできた薄肉矩形板で構成されている。ii) 断面の一部塑性化した後も曲げひずみは平面保持する。iii) 板厚は断面寸法に比べて十分小さく、断面のそりは板厚中心のそりで表される。iv) 曲げによるせん断応力は無視する。v) 板厚中心面に垂直で、部材軸線に平行な面内でのせん断ひずみは無視する。vi) von Mises の降伏条件式が成立し、非弾性域では Prandtl-Reuss の応力-ひずみ式が成立する。vii) 断面の一部が塑性化した後も、St. Venant のねじりによるせん断ひずみは板厚方向に直線分布する。viii) 变位は大きくてひずみは微小である。以下の諸式で、記号の上に₊を付したもののは、全变位、全ひずみなどを表し、付かない通常の記号は、それらの増分量を表わるものとする。

3) 接線剛性マトリックス； オ_i段階までに変形した構造部材の上に右手系の局所座標(x, y, z)を、次の荷重増分の後、変形した構造部材の上に(i₊, η, ω)を、断面の回軸_iを原点として、図1のように定める。ここでは、断面の塑性化後の回心やせん断中心の移動は追跡せずに、物体に固定した任意の基準軸の増分変位のみで定式化を行つたので、断面諸量を表わすのに便利な回軸を基準軸とした。断面内の任意点の軸ひずみ増分とは、部材軸の変位u, v, wおよびねじり角増分φにより次式で表わされる。

$$\epsilon = u' - (\eta - \omega \phi) v'' - (S + \eta \phi) w'' + \frac{1}{2} [(v')^2 + (w')^2] + \frac{1}{2} (\eta^2 + \omega^2) (\phi')^2 - \omega \phi'' \quad (1)$$

ここで、ωは重心に関するそり関数である。又、せん断ひずみ増分とは、St. Venant のせん断ひずみのみを考慮すると

$$\dot{\epsilon} = 2n\phi' \quad (2)$$

となる。ここでは図2に示す板厚中心線からの距離を表す。i状態での節点荷重をP_i、i+1状態での節点荷重をP_{i+1}、その間の節点変位増分をu_iとする。外力ポテンシャルの増分V_iは次式で表わされる。

$$V_i = -\{(\bar{u}_i + u_i)^T \cdot (\bar{P}_i + P_i) - \bar{u}_i^T \cdot \bar{P}_i\} = -u_i^T \cdot (\bar{P}_i + P_i) - \bar{u}_i^T \cdot P_i \quad (3)$$

i状態での任意点の応力を(ε_i, σ_i)、断面力の増分と変形の増分をそれぞれ

$$f_i = [N_i - M_{i\theta}, M_y, M_w, T_s]^T, \quad d_i = [\epsilon_i, -k_y, k_y, k_w, \psi]^T$$

とし、荷重増分中の線形性を仮定すると、内力のなす仕事増分D_iは、部材長をLとして次式で表わされる。

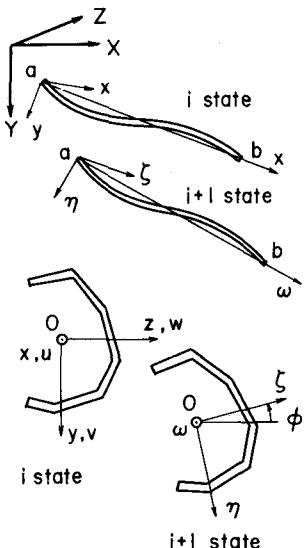


図1 座標系

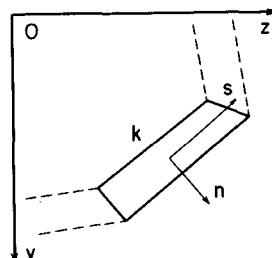


図2 オリジン矩形板

$$\Delta = \frac{1}{2} \int_0^L dI^T f dx + \int_0^L \left(\int_A \bar{\epsilon} \delta dA \right) dx + \int_0^L \left(\int_A \bar{\epsilon} f dA \right) dx \quad (4)$$

一方、断面力増分 Δf と変形増分 dI の関係は、仮定の応力増分とひずみ増分の関係より次式で表わされる。

$$\begin{bmatrix} N \\ -M_s \\ M_\eta \\ M_w \\ T_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_1 & S_2 & S_3 & S_4 & S_5 \\ S_6 & S_7 & S_8 & S_9 & -k_S \\ S_{10} & S_{11} & S_{12} & k_\eta \\ S_{13} & S_{14} & k_w \\ S_{15} & \psi \end{bmatrix}_{\text{Sym}} \quad \text{ここで } \begin{aligned} S_1 &= E \int (1-D_1) dA, & S_2 &= E \int \eta (1-D_1) dA, & S_3 &= E \int \zeta (1-D_1) dA, \\ S_4 &= E \int \omega (1-D_1) dA, & S_5 &= 2E \int n D_2 dA, & S_6 &= E \int \eta^2 (1-D_1) dA, \\ S_7 &= E \int \eta \omega (1-D_1) dA, & S_8 &= 2E \int n \eta D_2 dA, & S_9 &= E \int \zeta^2 (1-D_1) dA, \\ S_{10} &= 2E \int n \zeta \omega (1-D_1) dA, & S_{11} &= E \int \omega^2 (1-D_1) dA, & S_{12} &= 2E \int n \omega D_2 dA, & S_{13} &= 4G \int n^2 (1-D_2) dA \end{aligned}$$

または

$$f = A \cdot dI \quad (5) \quad \text{iii) ひずみ硬化域: } D_1 = D_2 = D_3 = 0, \quad \text{ii) 塑性域: } D_1 = (\bar{E}_S G) \bar{\epsilon}^3 / B, D_2 = \bar{\epsilon} \bar{\tau}^2 / B, D_3 = 3 \bar{\epsilon}^2 / B$$

式(4)に式(1), (2)および(5)を代入すると次式となる。

$$\Delta = \frac{1}{2} \int_0^L dI^T \cdot A \cdot dI dx + \int_0^L \bar{N} / \bar{U} + \frac{1}{2} (\bar{v}')^2 + \frac{1}{2} (\bar{w}')^2 dx + \int_0^L \bar{M}_S (v'' + \phi w'') dx - \int_0^L \bar{M}_Y (w'' - \phi v'') dx + \frac{1}{2} \int_0^L \bar{K} (\phi')^2 dx - \int_0^L \bar{M}_w \phi'' dx + \int_0^L \bar{T}_S \phi' dx \quad (6)$$

$$\text{ここで: } \bar{N} = \sum_{k=1}^m \int_A \bar{\sigma}_k dA, \quad \bar{M}_S = - \sum_{k=1}^m \int_A \bar{\sigma}_k \eta dA, \quad \bar{M}_Y = \sum_{k=1}^m \int_A \bar{\sigma}_k \zeta dA \\ \bar{K} = \sum_{k=1}^m \int_A (\eta^2 + \zeta^2) dA, \quad \bar{M}_w = \sum_{k=1}^m \int_A \bar{\sigma}_k w dA, \quad \bar{T}_S = 2 \sum_{k=1}^m \int_A \bar{\epsilon} n dA$$

次に、 x 軸方向の任意点の変位増分を、 u については x の一次式、 v, w については x の三次式で近似する。さらに、断面力増分の x 方向の分布については、 $\bar{N}, \bar{K}, \bar{T}_S$ は x 軸方向に一定、 $\bar{M}_S, \bar{M}_Y, \bar{M}_w$ は x の一次式で近似する。よって系のポテンシャルエネルギー増分 $\Pi = U + V$ は、節点変位増分 u で表示され、 u による変分をとると、節点外力増分と節点変位増分を関係づける増分 Δf が得られる。

$$(k_{\text{rep}} + k_g) \cdot u = \Pi - (\bar{f} - \bar{P}) \quad (7)$$

$$\text{ここで: } u = [u_a \ u_b \ u_c \ u_d \ u_e \ u_f \ u_g \ u_h \ u_i \ u_j \ u_k \ u_l \ u_m \ u_n \ u_o]^\top \\ \Pi = [P_{x0} \ P_{x1} \ P_{x2} \ M_{x0} \ M_{x1} \ M_{x2} \ B_a \ B_b \ P_{y0} \ P_{y1} \ P_{y2} \ P_{y3} \ M_{y0} \ M_{y1} \ M_{y2} \ B_b]^\top \\ \bar{P} = [\bar{P}_{x0} \ \bar{P}_{x1} \ \bar{P}_{x2} \ \bar{M}_{x0} \ \bar{M}_{x1} \ \bar{M}_{x2} \ \bar{B}_a \ \bar{B}_b \ \bar{P}_{y0} \ \bar{P}_{y1} \ \bar{P}_{y2} \ \bar{M}_{y0} \ \bar{M}_{y1} \ \bar{B}_b]^\top \\ \bar{f} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\bar{N}_a + \bar{N}_b}{2} - \frac{\bar{M}_{ya} - \bar{M}_{yb}}{2} \quad \frac{\bar{M}_{ya} - \bar{M}_{yb}}{l} \quad \frac{\bar{M}_{ya} \bar{M}_{yb}}{l} - \bar{T}_S - \bar{M}_{ya} - \bar{M}_{yb} \quad \bar{M}_{ya} \\ \frac{\bar{N}_a + \bar{N}_b}{2} - \frac{\bar{M}_{ya} - \bar{M}_{yb}}{2} \quad \frac{\bar{M}_{ya} - \bar{M}_{yb}}{l} \quad \frac{\bar{M}_{ya} \bar{M}_{yb} + \bar{T}_S}{l} \quad \bar{M}_{ya} \bar{M}_{yb} - \bar{M}_{yb} \end{array} \right\}^\top$$

k_{rep} は弾塑性剛性マトリックス、 k_g は幾何学的非線形性を表わす応力マトリックス、 $(\bar{f} - \bar{P})$ は不つり合ひ力を表わす。

4) 数値計算例: H形鋼の圧縮(ねじり) 中中

実験値と本法による比較として、回転端部のねじり角とびねじり角の軸方向分布についての計算結果を図3, 4 に示した。計算は、部材分割数10, 断面分割数26である。弾塑性域では良好な一致を示している。他の計算例については講演当日に発表する予定である。なお、本研究は昭和54年度科研費(一般研究C)を受けていた。

<参考文献>

1) Komatsu & Sakimoto "Nonlinear Analysis of Spatial ... Proc. JSCE, No. 252 Aug. 1976

2) Murray & Rajasekaran "Technique for Formulating Beam Equations." Jour. of EM., Proc. of ASCE, Vol. 101, Oct., 1975

図4 材軸方向のねじり角分布
($L=650, T=5 \text{ cm} \cdot \text{cm}$)

