

北海道大学 正 員 三 上 隆
北海道大学 正 員 芳 村 仁

1. はじめに 回転双曲殻の自由振動問題を解析的に解くことは、基礎方程式、境界条件などの特性上、不可能に近く、その解法は何らかの近似解法に頼らざるをえない。回転双曲殻の自由振動に関する最近の論文としては差分法¹⁾、有限要素法²⁾などによる論文がある。両手法とも解法の簡明さという利点などがある一方、計算精度の向上を計るため格子間隔を小さく選んだり、要素細分割の必要性がでてくる。シエルの端部効果は薄肉になるほど急激な減衰的傾向を呈することが知られており、これをカバーするためにはとくにその必要がでてくる。このように、格子点数や要素分割数が増大すると、固有方程式の階数が不可避免的に増大するという難点があり、大次元マトリックスの演算や固有値計算上の精度の低下が予想される。ここで述べる直交選点法はShifted Legendreの多項式の根を選点とするもので、選点は境界近くに密に配置されるという利点があり、少ない選点で解析が可能であり、高精度の固有値解析が行えるものと思われる。直交選点法による解法を略述すると以下となる。基礎方程式、境界条件を緯線方向にFourier級数展開し経線方向座標に関する常微分方程式、境界条件式を誘導しそれに直交選点法を用いて解析する。このとき数値計算の簡易化を計るため固有ベクトルを選点における解の値として表わすことを試みる。

2. 解析方法

回転双曲殻の幾何学的形状からつぎの関係が成り立つ。(Fig-1)

$$\frac{R^2}{a^2} - \frac{Z^2}{C^2} = 1, \quad R_\varphi = -\frac{a^2 C^2}{(a^2 \sin^2 \varphi - C^2 \cos^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}}, \quad R_\theta = \frac{a^2}{(a^2 \sin^2 \varphi - C^2 \cos^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}} \quad (1)$$

ここで、 Z = スロート部からの距離、 R = 曲面上の任意点の半径、 a = スロート部の半径、 C = 曲率パラメータ、 φ = 経線の任意点で立てた法線と回転軸との交角、 $R_\varphi = R_\theta$ = 曲面の主曲率半径。

変位関数 u (経線方向)、 v (緯線方向) および w (曲面の法線方向) は緯線方向に級数展開された次式で表わされる。

$$\left. \begin{aligned} u &= \sum_n h U \cos n\theta \cdot \sin \omega t \\ v &= \sum_n h V \sin n\theta \cdot \sin \omega t \\ w &= \sum_n h W \cos n\theta \cdot \sin \omega t \end{aligned} \right\} \text{-----} (2)$$

ここで、 h = 殻の厚さ、 n = 展開次数、 ω = 固有円振動数、 U, V, W = 無次元化された変位関数。

基礎方程式はNovozhilov⁴⁾のつり合い式より求め、経線方向座標 α $[0, 1]$ に関する常微分方程式は次式となる。

$$\left. \begin{aligned} F_U(\alpha, U, U', U'', V, V', W, W', W'', W''') &= 0 \\ F_V(\alpha, U, U', V, V', V'', W, W', W'', W''') &= 0 \\ F_W(\alpha, U, U', U'', V, V', V'', W, W', W'', W''') &= 0 \end{aligned} \right\} \text{---} (3)$$

ここで、 $(\cdot)' = d(\cdot)/d\alpha$ 。式(3)は変位関数の常微分方程式である。境界条件は、 $\alpha = 0, 1$ における条件より

$$B_i(\alpha, U, V, W, U', V', W', \dots) = 0, \quad i=1 \sim 8 \text{-----} (4)$$

固有方程式は以下の手順により得られる。まず、式

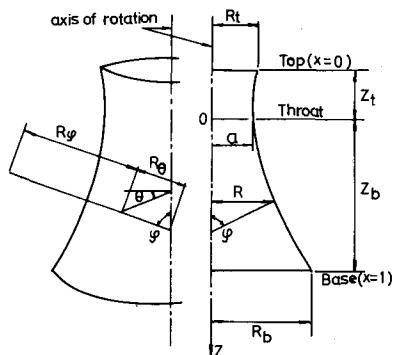


Fig-1 Hyperboloid of revolution

(3)での導関数は1~4次であり、それらを選点での解の値と結びつけるマトリックスを誘導する⁵⁾。つぎに、これを用いて微分方程式と境界条件式より残差 R を求める。

$$\left. \begin{aligned} R_U[\alpha_1 \dots \alpha_{N+2}, U(\alpha_1) \dots U(\alpha_{N+2}), V(\alpha_1) \dots V(\alpha_{N+2}), \dots] &= 0 \\ R_V[\alpha_1 \dots \alpha_{N+2}, U(\alpha_1) \dots U(\alpha_{N+2}), V(\alpha_1) \dots V(\alpha_{N+2}), \dots] &= 0 \\ R_W[\alpha_1 \dots \alpha_{N+2}, U(\alpha_1) \dots U(\alpha_{N+2}), V(\alpha_1) \dots V(\alpha_{N+2}), \dots] &= 0 \end{aligned} \right\} \text{---} (5)$$

ここで、 N = 内部選点数、 $\alpha_1 = 0, \alpha_{N+2} = 1$, $\alpha_2 \sim \alpha_{N+1}$ = 内部選点。境界条件より

$$R_B[\alpha_1 \dots \alpha_{N+2}, U(\alpha_1) \dots U(\alpha_{N+2}), V(\alpha_1) \dots V(\alpha_{N+2}), \dots] = 0 \text{---} (6)$$

式(5)と(6)より内部選点での解の値を固有ベクトルとする固有方程式を求めマトリックス表示すると次式となる。

$$[[\alpha] - \lambda [I]] \{\delta\} = 0 \text{-----} (7)$$

ここで、 $\lambda = \rho a^2 \omega^2 / E$, ρ = 密度、 E = 弾性係数

$$\{\delta\}^T = \{U(x_2) \dots U(x_{N+1}), V(x_2) \dots V(x_{N+1}), W(x_2) \dots W(x_{N+1})\}$$

$$[\alpha] = 3N \times 3N \text{ のマトリックス, } [I] = 3N \times 3N \text{ の単位マトリックス}$$

3. 数値計算例 直交選点法による解の精度は内部選点数 N の増加に伴って高められる。ここでは、数値解の収束性および精度の検討を目的とし既往研究に用いられている諸元の回転双曲殻(固定-自由)の固有振動数を求める。解析に用いた諸元は $a = 25.6m$, $R_c = 26.63m$, $R_b = 41.85m$, $L = 18.28m$, $Z_b = 82.30m$, $\nu = 0.15$, $E = 0.21 \times 10^6 kg/cm^2$, $\rho = 0.245 \times 10^{-5} kg/cm^3$ である。本法による結果と従来の解析法(差分法¹⁾, 数値積分法²⁾, 有限要素法³⁾)との比較を Table-1 に示す。本法と既往研究結果(差分法, 数値積分法)との最大相対誤差は内部選点数 $N = 8$ で 4.6%, $N = 9$ で 1.7%, $N = 10$ と 11 で 1.2% と良好に一致しており, これらのことから, 本法の少ない内部選点数で高精度の解が得られる有効性をうかがうことが出来るものと思われる。Fig-2 に経線方向展開次数 $n = 1 \sim 4$ での 1 次モード (U, V, W) を示す。縦軸は経線に右う座標 $x[0, 1]$ である。図より n が大きくなるにつれて経線方向モード U が小さくなることがわかる。

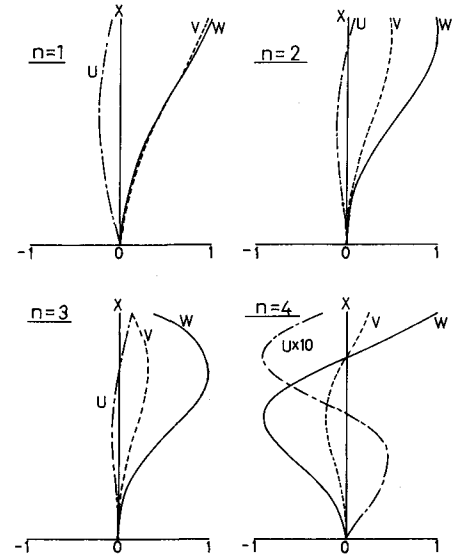


Fig-2 Mode shapes

4. まとめ 回転双曲殻の自由振動問題の一解析法として直交選点法による解法を提示し, 本法の有効性の検証を目的として従来の解析法との比較を行った。その結果, 少ない選点数で高精度の数値解を得ることが出来ることが明らかにされた。参考文献

- 1) M. G. Hashish and S. H. Abu Sitta. ASCE 97 (EM2) PP253~269 (1971)
- 2) S. K. Sen and P. L. Gould. ASCE 100 (EM2) pp283~303 (1974)
- 3) R. L. Carter et al. ASCE 95 (EM5) PP1033~1052 (1969)
- 4) V. V. Novozhilov. Thin Shell Theory, P. Noorhoff (1964)
- 5) 三上 孝村. オ34回年次講演概要集 pp43~44 (1979)

Table-1 Natural frequencies (in Hz)

Circumferential mode	Longitudinal mode	Numerical integration	Finite difference	Finite element method	Orthogonal collocation method			
					N=8	N=9	N=10	N=11
1	1	3.2884	3.3345	3.2010	3.3069	3.3089	3.3086	3.3086
	2	6.7405	6.8816	6.8176	6.8017	6.8006	6.8013	6.8013
	3	10.5207	10.5316	10.6666	10.5077	10.4975	10.4971	10.4986
2	1	1.7654	1.7848	1.7662	1.7754	1.7774	1.7771	1.7770
	2	3.6931	3.7234	3.6960	3.6998	3.6986	3.7012	3.7010
	3	6.9562	6.9553	7.0058	6.9751	6.9628	6.9598	6.9609
3	1	1.3749	1.3929		1.3817	1.3833	1.3829	1.3825
	2	1.9904	2.0150		2.0011	2.0013	2.0045	2.0037
	3	4.3254	4.3353		4.3657	4.3459	4.3439	4.3462
4	1	1.1808	1.2003	1.1820	1.1812	1.1842	1.1862	1.1854
	2	1.4475	1.4579	1.4491	1.4575	1.4565	1.4572	1.4565
	3	2.7777	2.7762	2.7866	2.8066	2.7845	2.7846	2.7875
5	1	1.0348	1.0441	1.0354	1.0258	1.0346	1.0380	1.0366
	2	1.4293	1.4417	1.4345	1.4520	1.4361	1.4357	1.4356
	3	2.0559	2.0553	2.0640	2.0723	2.0628	2.0641	2.0665
6	1	1.1467	1.1544		1.1454	1.1504	1.1520	1.1490
	2	1.3231	1.3335		1.3408	1.3244	1.3279	1.3311
	3	2.0141	2.0152		2.0265	2.0295	2.0243	2.0239
7	1	1.3014	1.3055		1.3132	1.3004	1.3015	1.3023
	2	1.5133	1.5189		1.4955	1.5170	1.5184	1.5188
	3	1.9217	1.9200		2.0087	1.9516	1.9281	1.9269