I－57　面内力を受ける板の固有振動問題の積分方程式法による解析

京都大学大学院　学生員　○宮井和信
京都大学工学部　正　員　丹羽義次
京都大学工学部　正　員　北原道弘

1、はじめに

平板の振動に関する問題は、その理論的かつ工学的重要性のために古くから研究されており、その研究結果および文献はかなり整理されている。しかし、固有振動問題に限定してみても、任意形状板を対象として固有値、固有モードを精度よく求める一般的手法は、いまだ確立していないように思われる。この任意幾何形状、任意境界条件を有する板の固有値解析を目的として、積分方程式法による固有振動問題の解析が最近行なわれている。積分方程式法によれば、領域内部の情報を全く含まない形で、固有値問題をより有効に定式化することができるわけである。本研究においては面内力を考慮し、一様面内力を受ける平板の固有振動問題を積分方程式法により定式化し、数値解析を行なってその適用性の検討を行なった。積分方程式の構成に際しては、Green積分表示、および層ポテンシャル表示による2つの方法を考え、任意幾何形状、任意境界条件を有する問題に対して固有値解析を行なった。特に、混合境界条件を有する問題に対しては、Green積分表示が適していることからGreen積分表示を用いた。

2、積分方程式による固有振動問題の定式化

一様面内力S（$S_x=S_y=S,\ S_{xy}=0$）を受ける均質等方板の面外振動の定常場を支配する微分方程式は、横荷重がない場合次のようになる。

$$\mathbb{L}u=(\Delta+\alpha^2)(\Delta-\beta^2)u=0 \qquad ---(1)$$

ここに、$\alpha^2=\frac{1}{2}[\sqrt{\zeta^4+4\lambda^4}\mp\zeta^4]\geq 0,\ \beta^2=\frac{1}{2}[\sqrt{\zeta^4+4\lambda^4}\pm\zeta^4]\geq 0$　（符号は上が引張，下が圧縮問題）

$\lambda^4=\rho h\omega^2/K\geq 0$，$\zeta^2=S/K\geq 0$，$K=Eh^3/12(1-\nu^2)$，$\Delta$；ラプラシアン

である。この時、(1)式を満足する基本解は、基本解に対する偏微分方程式を　$\mathbb{L}u=-\delta\cdot\mathbb{1}$（$\delta$; Dirac measure）とすると次のようになる。

$$\mathbb{U}(r)=-\frac{1}{\alpha^2+\beta^2}\cdot\frac{i}{4}[H_0^{(1)}(\alpha r)-H_0^{(1)}(i\beta r)] \qquad ---(2)$$

ここに、$H_0^{(1)}(z)$は第1種0次Hankel関数，rは2点間の距離を表わす。

Fig.1に示すような形状の板に対し、境界条件は次の境界作用素のうちの2つからなる。

$$\left.\begin{array}{l} \text{a)}\ \mathrm{Tr}\,u(x)=0,\quad \text{b)}\ \mathrm{Tr}\,\partial_n u(x)=0,\quad \text{c)}\ \mathrm{Tr}\,\mathbb{M}u(x)=\mathrm{Tr}[\Delta-(1-\nu)\partial_s^2]u(x)=0 \\ \text{d)}\ \mathbb{V}_n u(x)=[\mathrm{Tr}\,\partial_n\Delta+(1-\nu)\partial_s\mathrm{Tr}\,\partial_n\partial_s]u(x)=0 \end{array}\right\} ---(3)$$

なお，Trは境界極限を意味する。

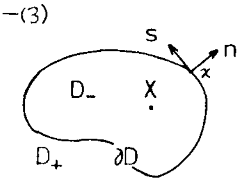

Fig.1

次に固有値決定積分方程式を考える。

Green積分表示による固有値決定積分方程式は、次に示す内部Green公式

$$\begin{aligned} \mathrm{F}u(X)=\int_{\partial D}[&\mathbb{U}(X,y;\lambda)\{\mathbb{V}_n u(y)\}-\{\partial_{n_y}\mathbb{U}(X,y;\lambda)\}\{\mathbb{M}_n u(y)\}+\{\mathbb{M}_{n_y}\mathbb{U}(X,y;\lambda)\}\{\partial_n u(y)\} \\ &-\{\mathbb{V}_{n_y}\mathbb{U}(X,y;\lambda)\}u(y)]\,ds_y \end{aligned} \qquad ---(4)$$

$$\begin{aligned} \mathrm{F}\partial_{n_x}u(X)=\int_{\partial D}[&\{\partial_{n_x}\mathbb{U}(X,y;\lambda)\}\{\mathbb{V}_n u(y)\}-\{\partial_{n_x}\partial_{n_y}\mathbb{U}(X,y;\lambda)\}\{\mathbb{M}_n u(y)\} \\ &+\{\partial_{n_x}\mathbb{M}_{n_y}\mathbb{U}(X,y;\lambda)\}\{\partial_n u(y)\}-\{\partial_{n_x}\mathbb{V}_{n_y}\mathbb{U}(X,y;\lambda)\}u(y)]\,ds_y \end{aligned} \qquad ---(5)$$

ただし、Fの値は　$\mathrm{F}=1\ (X\in D_-)$，$\mathrm{F}=1/2\ (X=x\in\partial D)$，$\mathrm{F}=0\ (X\in D_+)$

によって、また、層ポテンシャル表示による固有値決定積分方程式は、2つのポテンシャルの重ね合わせによる次式

$$u(X)=\int_{\partial D}[\mathbb{U}(X,y;\lambda)\mu_0(y)]\,ds_y-\int_{\partial D}[\{\partial_{n_y}\mathbb{U}(X,y;\lambda)\}\mu_1(y)]\,ds_y \qquad ---(6)$$

によって、固有値問題に対する境界条件を考慮すれば得られる。これより、境界値問題(1), (3)に対し固有値を求める問題は、境界積分方程式に非自明解が存在するためのパラメーターλの値を求める問題として定式化される。固有値が求まると、それに対して境界固有密度μ_0, μ_1が得られ、さらに内部での固有モードが(4)式、または(6)式より求まる。

3. 数値解析例

一様面内力を受ける板の固有振動問題に対する本解析法の精度を確認するために、まず、基本的形状である円形，正方形板を対象とした。Table 1 は、正方形固定支持板に対する$\zeta=\sqrt{S/K}$の値の変化による第1固有値の値の変化を示し、NASA SP-160による結果と比較したものである。なお、Nは境界分割数を表わす。Table 2は、正方形単純支持板に対する第3固有値までの値を、Green積分表示を用いた場合と層ポテンシャル表示を用いた場合とで比較したものである。これらの結果より、本手法によれば，層ポテンシャル表示式による固有値の精度はGreen積分表示式による場合とほぼ一致し、$\Delta\lambda=0.01$とすれば各固有値は十分な精度(0.1%程度の誤差)で求まるといえる。次に，応用例として直角二等辺三角形(斜辺を2.0として正規化)を対象とし、また境界条件として固定(斜辺)ー単純(他の2辺) 混合支持条件を解析対象として、Green積分表示を用いた場合の第5固有値までの値をTable 3に示した。なお、第1固有値の相対誤差はNASA SP-160の結果との比較において0.1%であり、他の固有値も各々十分な精度をもつと思われる。Fig.2～Fig.4には、Table 3の第1～第3固有値に対する固有密度および固有モードを各々(a)図，(b)図に示した。固有密度図において実線，点線，一点鎖線は各々μ_0(せん断力)，μ_1(モーメント)，μ_2(回転角) を示す。これら密度図に示すように，本手法によれば各モードに対する境界上の力の分布が直接的に求まり、本解析法の1つの有効な点となっている。上記の応用例と同様な固定ー自由混合支持条件を解析対象とした場合については、当日発表する。

Table 1 (N=28, $\Delta\lambda$=0.1)

ζ	NASA SP-160		Integral Eq.
	λ		λ
	Lower bound	Upper bound	
0	6.00		6.0
$\sqrt{5}\pi$	7.04	7.06	7.0
$\sqrt{10}\pi$	7.74	7.77	7.7
$\sqrt{20}\pi$	8.72	8.78	8.7
$\sqrt{30}\pi$	9.45	9.52	9.4
$\sqrt{50}\pi$	10.52	10.63	10.5
10π	12.18	12.45	12.3
$\sqrt{200}\pi$	14.41	14.69	14.4

Table 2 ζ=0 (Frequency) (N=32, $\Delta\lambda$=0.001, ν=0.3)

	λ_1	λ_2	λ_3
NASA SP-160 ($\bar{\lambda}_j$)	4.443	7.025	8.886
Integral Eq. (λ_j) [Green]	4.442	7.023	8.882
Integral Eq. (λ_j) [Layer]	4.440	7.022	8.880

Table 3 (N=28, $\Delta\lambda$=0.01, ν=0.3)

	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5
ζ= 5 (Tension)	6.48	8.41	9.35	10.43	11.20
ζ= 0 (Frequency)	5.73	7.78	8.78	9.89	10.70
ζ=-5 (Compression)	4.42	6.94	8.06	9.26	10.12

4. おわりに

基本的形状について本手法とNASA SP-160の結果との比較により，本解析法によれば面内力(引張および圧縮)を受ける平板の固有値，固有モードが精度よく求まることがわかった。また，三角形形状，混合境界条件板の応用例により，本手法の任意形状，任意境界条件を有する板の固有振動解析への適用性が確認された。

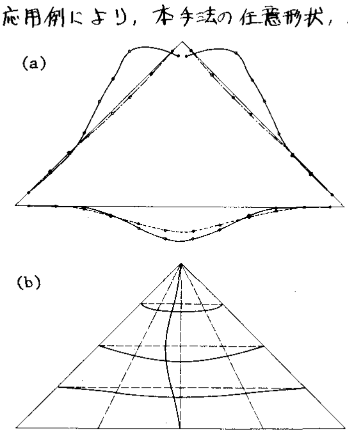

Fig.2 (1st)

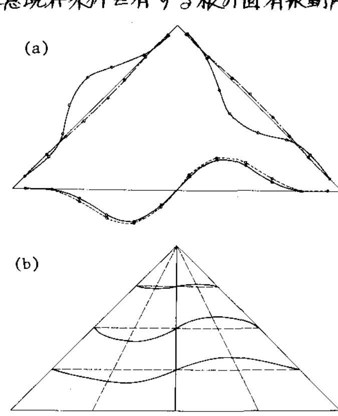

Fig.3 (2nd)

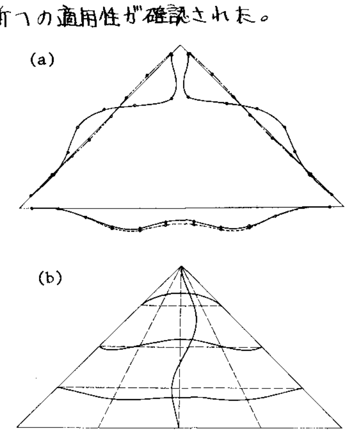

Fig.4 (3rd)