

応力関数法による偏平Right Helicoidal Shellの解析解について

東京電機大学 正員 ○井浦雅司

早稲田大学 正員 平嶋政治

1. まえがき

シェル構造解析においては, shallow 近似が多く行われているが, Right Helicoidal Shell (R.H. シェル) に関しては, O'Mathuna¹⁾により $\alpha/r < 1/6$ であれば shallow シェル理論による数値結果の誤差は, より厳密な理論の 1% 以内であることを報告されている。R.H. シェルに関する研究は, 初期接合板とらせん板とに分けられるが, その多くは端部にのみ荷重を受けるシェルの解析である。^{2) 3)}

一方, 等分布及び集中法線荷重をうけ, 周辺で支持せられたらせん板を扱った研究としては, エネルギー法に基づく近似解が報告されているだけで, 解析解を求めた研究は少ない。本報告においては, shallow R.H. シェルの解析解を応力関数法より求め, 種々の境界条件及び剛性の下に数値計算を行い, その静的挙動について調べる。

2. R.H. シェルの解析解

Fig. 1 に示すような $r = r_0, r_1 (> 0)$ 及び $\theta = \theta_0, \theta_1$ ($\theta_1 - \theta_0 = \alpha$) において境界を有するシェルの考える。応力関数 ϕ , 面内の荷重ポテンシャル Ω , シェル中央面の法線方向変位 w , 法線方向分布荷重 P_n を用いると, Vlasov 型の微分方程式は次式の様に書ける。⁴⁾

$$\begin{aligned}
 \nabla^2 \nabla^2 w + \beta^2 \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) &= \tilde{P}_n, \\
 \nabla^2 \nabla^2 \phi - \beta^2 \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial w}{\partial \theta} \right) &= \nabla^2 \tilde{\Omega}
 \end{aligned} \quad (1-a, b)$$

ここに

$$\begin{aligned}
 \nabla^2 &= \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}, \quad \tilde{\phi} = \frac{\beta^2 \phi}{Et}, \\
 \beta^4 &= \frac{12(1-\nu^2)}{Et^3}, \quad \tilde{\Omega} = -\frac{(1-\nu)\beta^2 \Omega}{Et}, \quad \tilde{P}_n = \frac{P_n}{\beta}
 \end{aligned} \quad (2-a \sim c)$$

であり, (r, θ) は極座標, E は Young 係数, ν は Poisson 比, t はシェル厚, β は曲げ剛性である。(1)式の解は

$$w = w_p + w_c, \quad \phi = \phi_p + \phi_c \quad (3-a, b)$$

と書け, ここに w_p 及び ϕ_p はそれぞれ特解と余関数である。なお本報告においては, $\theta = \theta_0, \theta_1$ において次の境界条件が成り立つものとする。

$$w = M_\theta = u = N_{r\theta} = 0 \quad (4)$$

まず鉛直方向等分布荷重 P_0 が作用した時の特解を求め, P_0 を θ 方向にフーリエ展開すると, P_n 及び Ω はそれぞれ

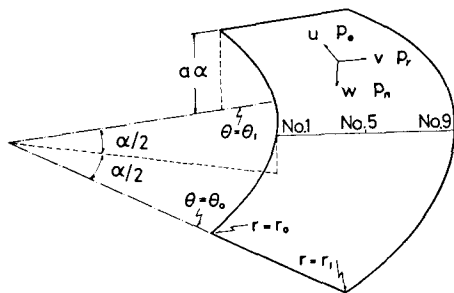


Fig. 1 R.H. シェル

ぞれ次式の様になる。

$$P_n = \sum_m P_m \sin \varepsilon_m \theta, \quad \Omega = -\sum_m a \varepsilon_m^{-1} P_m \cos \varepsilon_m \theta \quad (5-a, b)$$

ここに

$$\varepsilon_m = \frac{m\pi}{\alpha}, \quad P_m = \frac{2P_0[1-(-1)^m]}{m\pi} \quad (6-a, b)$$

(5)式を(1)式へ代入して特解 w_p, ϕ_p を求めると,

$$\begin{aligned}
 w_p &= \sum_m (S_{1m} r^4 + R_{1m} r^2) \sin \varepsilon_m \theta, \\
 \phi_p &= \sum_m (S_{2m} r^4 + R_{2m} r^2) \cos \varepsilon_m \theta
 \end{aligned} \quad (7-a, b)$$

となり, ここに

$$\begin{aligned}
 S_{1m} &= \frac{P_m}{D} \frac{\delta_1}{\{(\delta_1)^2 - (\delta_2)^2\}}, \quad S_{2m} = \frac{P_m}{D} \frac{\delta_2}{\{(\delta_1)^2 - (\delta_2)^2\}}, \\
 R_{1m} &= \frac{P_m}{E^*} \frac{\delta_2}{\{(\delta_3)^2 - (\delta_4)^2\}}, \quad R_{2m} = \frac{P_m}{E^*} \frac{\delta_3}{\{(\delta_1)^2 - (\delta_4)^2\}}, \\
 \delta_1 &= \varepsilon_m^4 - 20\varepsilon_m^2 + 64, \quad \delta_2 = 6a\varepsilon_m\beta^2, \\
 \delta_3 &= \varepsilon_m^4 - 4\varepsilon_m^2, \quad \delta_4 = 2a\varepsilon_m\beta^2, \\
 1/E^* &= -\frac{a(1-\nu)\beta^2\varepsilon_m}{Et}
 \end{aligned} \quad (8-a \sim e)$$

次に余関数を求めるが, 境界条件式(4)を考慮すると, 変位関数 w_c 及び応力関数 ϕ_c は次式のように書ける。

$$w_c = \sum_m W_m(r) \sin \varepsilon_m \theta, \quad \phi_c = \sum_m \tilde{\phi}_m(r) \cos \varepsilon_m \theta \quad (9-a, b)$$

(9)式を(1)式の有次方程式に代入すると, 変数 r のみの常微分方程式が得られ, さらに Frobenius の方法を用いて

$$W_m(r) = A r^{1+\lambda}, \quad \tilde{\phi}_m(r) = B r^{1+\lambda} \quad (10-a, b)$$

とおくと, A 及び B が非自明解を持つ条件として以下の λ に関する 8 次の代数方程式を得る。

$$\{\lambda^4 - 2(1+\varepsilon_m^2)\lambda^2 + (1-\varepsilon_m^2)^2\}^2 - (2a\beta^2\varepsilon_m\lambda)^2 = 0 \quad (11)$$

(11)式の根は, 全てが実根である場合と, 4根が虚根で

残りの4根が虚根の場合の二通り考えられるが、ここでは後の場合について考える。この時、(11)式の根は

$$\lambda_{2j-1} = -\lambda_{2j} = \eta_j \quad (j=1, 2),$$

$$\lambda_j^* = \kappa \pm i\mu, \quad \lambda_j = -\kappa \pm i\mu \quad (12-a, b)$$

と書け、ここに η_j, κ, μ は実数であり、 $i = \sqrt{-1}$ である。ここに変位が実数であることを考慮すると、変位関数 $w_m(r)$ は次の様な形に書くことができる。

$$w_m(r) = \sum_{j=1}^2 (A_{2j-1} r^{1+\eta_j} + A_{2j} r^{1-\eta_j}) + \bar{A}_5 r^{1+\kappa} \cos(\mu \ln r) + \bar{A}_6 r^{1+\kappa} \sin(\mu \ln r) + \bar{A}_7 r^{1-\kappa} \cos(\mu \ln r) + \bar{A}_8 r^{1-\kappa} \sin(\mu \ln r) \quad (13)$$

ここに

$A_j^* = \frac{1}{2}(\bar{A}_5 \mp i\bar{A}_6)$, $A_j = \frac{1}{2}(\bar{A}_7 \mp i\bar{A}_8)$ (14-a, b) であり、 $\bar{A}$ は実数を示す。次に A と B の関係を求めると、 λ が実数の場合 ($j=1 \sim 4$) と虚数の場合 ($j=5 \sim 8$) とに分けてそれぞれ次式の様に求まる。

$$B_j = T_j A_j \quad (j=1 \sim 8) \quad (15)$$

(a) $j=1 \sim 4$ の時

$$T_j = \frac{2\alpha\beta^2 \varepsilon_m \lambda_j}{\lambda_j^4 - 2(1+\varepsilon_m^2)\lambda_j^2 + (1-\varepsilon_m^2)^2} \quad (16)$$

(b) $j=5 \sim 8$ の時

$$T_j = T_j^* + iT_j^{**},$$

$$T_j^* = \frac{2\alpha\beta^2 \varepsilon_m (\kappa_j^2 M_1 + \mu_j^2 M_2)}{(M_1)^2 + (M_2)^2},$$

$$T_j^{**} = \frac{2\alpha\beta^2 \varepsilon_m (\mu_j^2 M_1 - \kappa_j^2 M_2)}{(M_1)^2 + (M_2)^2},$$

$$M_1 = (\kappa_j^2 - \mu_j^2)^2 - 4\kappa_j^2 \mu_j^2 - 2(1+\varepsilon_m^2)(\kappa_j^2 - \mu_j^2) + (1-\varepsilon_m^2)^2,$$

$$M_2 = 4\kappa_j \mu_j (\kappa_j^2 - \mu_j^2 - 1 - \varepsilon_m^2) \quad (17-a \sim e)$$

ここに、 κ_j 及 μ_j は以下の式で表わされる。

$$\lambda_j = \kappa_j + i\mu_j \quad (j=5 \sim 8) \quad (18)$$

(15)式を用いると、応力関数 $\phi_m(r)$ は次式の様に求まる。

$$\phi_m(r) = \sum_{j=1}^2 (A_{2j-1} T_{2j-1} r^{1+\eta_j} + A_{2j} T_{2j} r^{1-\eta_j})$$

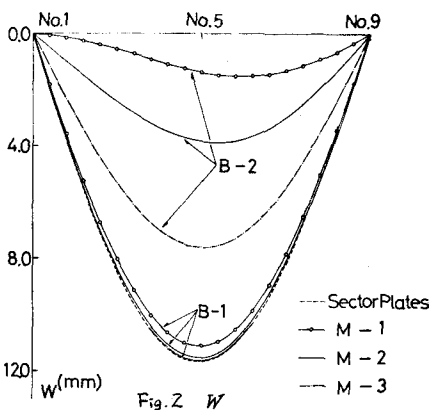


Fig. 2 w

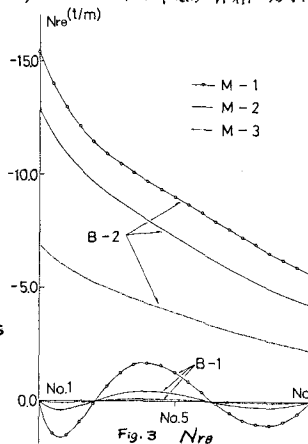


Fig. 3 N_{rr}

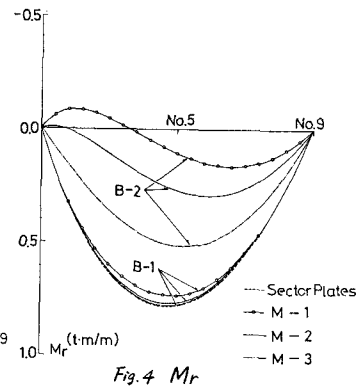


Fig. 4 M_r

$$+ \bar{A}_5 r^{1+\kappa} \{ \bar{T}_5 \cos(\mu \ln r) - \bar{T}_6 \sin(\mu \ln r) \} + \bar{A}_6 r^{1+\kappa} \{ \bar{T}_6 \cos(\mu \ln r) + \bar{T}_5 \sin(\mu \ln r) \} + \bar{A}_7 r^{1-\kappa} \{ \bar{T}_7 \cos(\mu \ln r) - \bar{T}_8 \sin(\mu \ln r) \} + \bar{A}_8 r^{1-\kappa} \{ \bar{T}_8 \cos(\mu \ln r) + \bar{T}_7 \sin(\mu \ln r) \} \quad (19)$$

$$T_j^* = \bar{T}_5 \pm i\bar{T}_6, \quad T_j = \bar{T}_7 \pm i\bar{T}_8 \quad (20-a, b)$$

3. 数値計算例

R. H. シェルの数値計算に際し、 $r = r_0, r_1$ において以下の境界条件を考える。

$$B-1) \quad w = M_r = N_r = N_{\theta} = 0$$

$$B-2) \quad w = M_r = u = v = 0 \quad (21-a, b)$$

シェルの材料定数は曲げ剛性が全て同じになる様に、以下の三つの場合を考える。なお $\nu = 0$ と仮定した。

$$M-1) \quad E_1 = 0.168 \times 10^{10} \text{ t/m}^2, \quad t_1 = 0.05 \text{ m}$$

$$M-2) \quad E_2 = 0.21 \times 10^{10} \text{ t/m}^2, \quad t_2 = 0.1 \text{ m}$$

$$M-3) \quad E_3 = 0.2625 \times 10^{10} \text{ t/m}^2, \quad t_3 = 0.2 \text{ m} \quad (22-a \sim c)$$

なお、シェルの寸法は以下の通りである。

$$r_0 = 5 \text{ m}, \quad r_1 = 10 \text{ m}, \quad \alpha = \pi/2, \quad 2\pi R = 5 \text{ m} \quad (23-a \sim d)$$

荷重としては、鉛直方向等分布荷重を考え、 $P_0 = 0.3 \text{ t/m}^2$ とおき、フーリエ級数の項数は $m=15$ である。Fig. 2~4 に数値結果を示すが、参考のために扇板のたわみ及び曲げモーメントも併せて図示した。

4. 参考文献

- 1) O'Mathuna: J. Math. Phys., 42 (1963), pp. 85-111.
- 2) Knowles & Reissner: Quart. Appl. Math., Vol. 17 (1960), pp. 409-422.
- 3) Wan: J. Appl. Mech., Vol. 35 (1968), pp. 382-392.
- 4) 西村: テンソルとシェル理論 (彰文社)
- 5) 大井: 土橋: 日本建築学会論文集, No. 215, pp. 53-61.
- 6) 平嶋・井浦: 第13回RTRI, 72解析法研究発表論文集, pp. 143-148
- 7) 平嶋・井浦: 第29回応力連合講演会論文抄録集, pp. 141-142.