I-52　定常状態直交異方弾性スラブの熱応力解析について

信州大学　正員　○石川　清志
〃　　〃　　夏目　正太郎

1．はじめに　弾性論において，2次元問題に関してはAiry応力関数による解法が重要な役割を果たしてきている．その優れた理論特性から広範な問題に応用されている．承知のように，このAiry応力関数は応力の平衡方程式を恒等的に満足する未知の応力関数によって応力成分を表わし，ひずみの適合条件と境界条件によって応力関数を決定する方法である．しかしながら，Airy応力関数による解法は，境界において応力が与えられ，そして応力を知る問題に関しては有力な解法であるが，境界において変位が与えられ，あるいは変位を知る問題に関してはあまり適切な解法とはいえないようである．また，ここでは直接関係ないが，連続条件を必要とする問題，物体力問題，さらに動力学問題についても同様なことがいえる．

Airy応力関数による解法と別に，応力平衡方程式，応力とひずみ関係，ひずみと変位の関係から，応力とひずみ成分を消去すると，変位で表示された方程式が得られ，この変位解を変位関数によって表わす方法がある．主として3次元弾性論において採用されている解法であって，一般に，変位解はポテンシャル論による変位ポテンシャル関数によって表示され，境界条件から変位ポテンシャル関数を決定する方法である．2次元問題で代表的なものとしては平面ひずみ状態のMarguerre変位関数をあげることができる．一般的に，変位関数による解法の方が第1種境界値問題の外に，第2，3種の境界値問題にも適応でき，より多くの興味ある弾性問題を解くことが可能であり相当広範囲に応用できるといえる．

準静的熱弾性の境界値問題は古くから数多くの人々により研究され，その基礎理論は十分に確立し，Boley－Weiner，Nowackiの著書に代表されるように，今日すでに解決済である．熱応力の方程式として，変位成分で表示された一般化Navierの式，あるいは，応力成分で表示されたBeltrami－Michellの式があるが，これらは，上述の応力関数による解法と，変位関数による解法のそれぞれのもつ理論特性のちがいから，一般化Navierの変位方程式の方が一般性であり広範囲に応用されている．この変位方程式は温度項による線形の非同次方程式であるから，重ね合せの原理が有効であり，その一般解は，温度項をゼロとした同次方程式の同次解と，非同次方程式の特解の2つの部分に分けられる．特解は熱弾性変位ポテンシャル関数を導入して解析され，同次解は調和関数を用いたNeuber－Papkovichの表示，あるいは重調和方程式の解を用いたGalerkinの表示による解法がある．そして，同次解と特解の和をもって与えられた境界条件を満たすようにする解析方法が一般に行われている．しかしながら，Goodierによって導入された熱弾性変位ポテンシャル関数による解は変位や応力の境界条件にかかわりなく，熱応力方程式の特解として得られるため，一般に境界条件は満足しない．そのため，一般解となるために境界条件を慎重に吟味する必要がある．

本研究は，時間に無関係（定常）な熱源のない温度場に関する熱応力問題に対して，熱弾性ポテンシャル，あるいはFourier変換等の変換理論を全く必要としない解析であり，変位で表示された方程式から，直接変位の一般解を誘導した変位関数の解析である．熱応力の変位方程式は連立性の非同次方程式であるから，ここでも重ね合わせの原理を用いて，一般解は同次方程式の同次解と非同次方程式の特解の和で表わすものとする．変位成分で表示される連立同次方程式から，連立性消去は微分演算子の行列式法で扱い，一連の解析手順を経て，連立同次方程式の満足する3同次解を得た．特解については熱伝導方程式の解の影響を考慮して連立非同次方程式の満足する解を誘導した．そして一般解に含まれた未定常数は与えた境界条件により決定するものである．この解析法を，熱伝導，力学的に直交異方性の弾性帯スラブに適応し，他の解析理論で得た結果と比較し，解の妥当性を確認した．

2．理論解析　熱弾性は温度場の影響をうけ弾性体の挙動を示すものである．弾性体内に熱源がなく，温度変化と弾性体の挙動が小さく，これに対応してゆっくりとした変形が生じ，いわゆる慣性の影響が無視できる場合，温度場は応力，ひずみと無関係に決められる．弾性体内の温度 $T(x,y)$ は式(1)の熱伝導方程式を満足する．k_x，k_y は x，y に関係した熱伝導係数である．いま，x に関して無限，y に関して幅 $2h$ の有限長の帯スラブとすると式(1)の解は式(2)のFourier積分で表わされる．$\Pi(p)$ は(2-by-2)の未定常数であり，温度境界条件が与えられると決定されるものである．

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+k^2\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}=0, \qquad k^2=\frac{k_y}{k_x}. \tag{1}$$

$$T(\xi,\eta)=\int_0^\infty \left[\mathrm{ch}\frac{p}{k}\eta \quad \mathrm{sh}\frac{p}{k}\eta\right]\Pi(p)\begin{bmatrix}\cos p\xi\\ \sin p\xi\end{bmatrix}dp, \qquad \xi=\frac{x}{h},\quad \eta=\frac{y}{h}. \tag{2}$$

平面ひずみ状態にある直交異方弾性体の応力と変位の関係は式(3)に表わされる．(u，v は x，y に関係する変位，A_{ij} は弾性係数，β_i は熱膨張係数)

$$\begin{bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \sigma_z\\ \tau_{xy}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A_{11}\frac{\partial}{\partial x} & A_{12}\frac{\partial}{\partial y}\\ A_{12}\frac{\partial}{\partial x} & A_{22}\frac{\partial}{\partial y}\\ A_{31}\frac{\partial}{\partial x} & A_{32}\frac{\partial}{\partial y}\\ A_{44}\frac{\partial}{\partial y} & A_{44}\frac{\partial}{\partial x}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u\\ v\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \beta_3\\ 0\end{bmatrix}T(x,y). \tag{3}$$

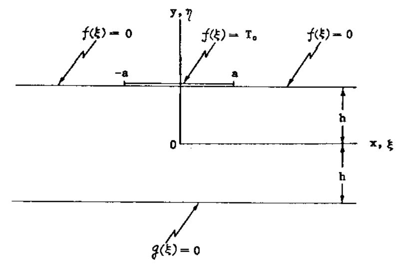


図-1．温度荷重状態

応力の平衡方程式は

$$\begin{bmatrix}\frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial y}\\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{bmatrix}=0. \tag{4}$$

式(3)，(4)から，応力成分を消去すると，熱応力の変位方程式は次式の連立性非同次方程式に表わされる．

$$\Delta\varpi=\Phi T(\xi,\eta), \qquad \varpi=\begin{bmatrix}u\\ v\end{bmatrix}. \tag{5}$$

Δ，Φ は微分演算子であり，それぞれ

$$\Delta=\begin{bmatrix}A_{11}\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}+A_{44}\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}, & (A_{12}+A_{44})\frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\eta}\\ (A_{12}+A_{44})\frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\eta}, & A_{44}\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}+A_{22}\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}\end{bmatrix}, \qquad \Phi=h\begin{bmatrix}\beta_1\frac{\partial}{\partial\xi}\\ \beta_2\frac{\partial}{\partial\eta}\end{bmatrix}.$$

式(5)は温度項 T による線形非同次方程式であるから，重ね合わせの原理を用いて，解 ϖ は同次方程式の同次解 ϖ_h と，式(5)の特解 ϖ_p の和で表わすものとする．

$$\varpi=\varpi_h+\varpi_p \tag{6}$$

すなわち，ϖ_h，ϖ_p は次式を満足する解である．

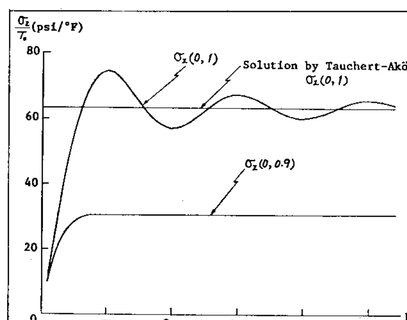
$$\Delta\varpi_h=0 \tag{7}$$

$$\Delta\varpi_p=\Phi T(\xi,\eta) \tag{8}$$

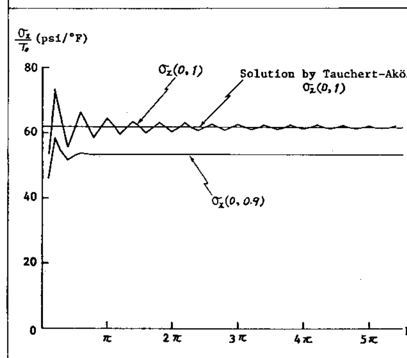
式(7)は2個の変位 u_h，v_h からなる連立性変位方程式であるから連立性を消去した u_h，v_h のそれぞれについて独立した微分方程式は次式の微分演算子 Δ の行列式に表わせる．

$$\det\Delta\, u_h=0, \qquad \det\Delta\, v_h=0. \tag{9}$$

式(9)の解を手がかりに式(7)の満足する ϖ_h を誘導し，さらに式(8)の満足する ϖ_p は式(2)の温度の影響を考慮すると，式(5)の満足する ϖ の一般解が得る．一般解に含まれた未定常数は変位，応力の境界条件から決定される．図-2は解析法の妥当性を証するため，Tauchert-Aközが図-1に示した温度荷重状態について，熱弾性変位ポテンシャル関数を用いて解いた結果と比較して表わしたものである．内部応力 $\sigma_z(0,0.9h)$ は積分上限値 $p=\pi$ 以上で良く収束した状態を示すが，縁応力 $\sigma_z(0,h)$ の収束状態は内部応力より劣るが $p=5\pi$ 以上で収束した解を得ることができた．



(a) For the case a = h



(b) For the case a = 5h

図-2．積分上限値に対する解 σ_z の収束性