

1. まえがき 中等厚板の解析方法の一つとして、古くより Love の方法が見受けられる。Love の方法は、平面応力解、一般化平面応力解および荷重条件を満足する特殊解の三つの解より構成されているが、最後の特殊解が任意荷重、たとえば、部分分布荷重あるいは部分分布せん断荷重などについてはつり合い方程式より直接求めることがなかなか困難とされており、古くよりある解法としてはあまり採用されていなかったようである。

また、曲げに関する境界条件が、薄板理論と同じく二つの条件のみで規定され、通常の厚板理論に見受けられる三つの境界条件が規定できないという一つの短所を含んでいる。しかしながら、応力あるいは変位成分に関しては何んらの仮定も含まず、三つの解がすべてつり合い方程式および適合条件式を厳密に満足しており、他の厚板理論に比較して大きな長所を有している。Love の方法は、その著書において、矩形厚板のみに関して述べられているが、本報告において述べる一方法は、Love の方法の長所を取り入れ、短所を解消すべく、円筒座標系における平面応力解、一般化平面応力解、荷重条件に関する特殊解として三次元応力解の一部および板の中央面に関して反対称の一般化平面応力解の四つの解を求め、それらを重ね合わせて荷重条件および境界条件を満足するように試みたものであり、円形中等厚板あるいは扇形中等厚板の解析に応用できる一つの解析方法である。

この方法の特徴は、変位あるいは応力成分に関する何んらの仮定も含まず、四つの解がすべてつり合い方程式および適合条件式を厳密に満足しており、さらに、Reissner 型の曲げに関する三つの境界条件が規定できるという点である。また、この方法の正確さについては、極度に薄い扇形厚板の厳密な三次元応力解析による結果と比較して検討した。

2. 平面応力解 円筒座標系 (r, θ, z) における平面応力解は、物体力を 0 とし、 $\mathcal{U} = \sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta} + \sigma_{zz}$ として変位成分を省略して示すと次のとおりである。

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 \mathcal{U} &= 0, \quad \mathcal{U} = \mathcal{U}_0 + \beta z \quad (\beta: \text{定数}), \quad \nabla^2 \mathcal{U}_0 = 0, \quad \nabla^2 = \partial^2/\partial r^2 + (1/r) \partial/\partial r + (1/r^2) \partial^2/\partial \theta^2 \\ \chi &= \chi_0 + \chi_1 z - \frac{\nu}{2(1+\nu)} \mathcal{U}_0 z^2, \quad \nabla^2 \chi = \mathcal{U} = \mathcal{U}_0 + \beta z, \quad \nabla^2 \chi_0 = \mathcal{U}_0, \quad \nabla^2 \chi_1 = \beta \\ \sigma_{rr} &= \frac{1}{r} \frac{\partial \chi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial \theta^2}, \quad \sigma_{\theta\theta} = \frac{\partial^2 \chi}{\partial r^2}, \quad \sigma_{r\theta} = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \chi}{\partial \theta} \right), \quad \sigma_{zz} = \sigma_{rz} = \sigma_{\theta z} = 0 \end{aligned} \right\} \dots (1)$$

3. 一般化平面応力解 $z=0$ を板の中央面の延長上に置き、 z の正の向きを上向きに取、板厚を h とすると、一般化平面応力解は、たとえば、次のとおりである。

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{U} &= \mathcal{U}_1 z, \quad \nabla^2 \mathcal{U}_1 = 0, \quad \chi' = z \chi'_1 + \frac{2-\nu}{6(1+\nu)} z^3 \mathcal{U}_1, \quad \nabla^2 \chi' = -\frac{1-\nu}{1+\nu} z \mathcal{U}_1, \quad \nabla^2 \chi'_1 = -\frac{1-\nu}{1+\nu} \mathcal{U}_1 \\ \sigma_{rz} &= \frac{1}{r(1+\nu)} (h^2 - 4z^2) \frac{\partial \mathcal{U}_1}{\partial r}, \quad \sigma_{\theta z} = \frac{1}{r(1+\nu)} (h^2 - 4z^2) \frac{1}{r} \frac{\partial \mathcal{U}_1}{\partial \theta}, \quad \sigma_{zz} = 0 \end{aligned} \right\} \dots (2)$$

4. 三次元応力解 物体力が 0 の場合のつり合い方程式の解を変位ベクトルで表わすと次のとおりである。

$$\left. \begin{aligned} 2G \mathcal{U} &= -\text{grad}(\bar{I}_0 + F \bar{I}) + 4(1-\nu) \bar{I} + 2r \text{rot} \mathcal{U}, \quad \mathcal{U} = (u, v, w), \quad F = (r, \theta, z) \\ \bar{I} &= (\bar{I}_r, \bar{I}_\theta, \bar{I}_z), \quad \mathcal{U} = (0, 0, \mathcal{U}_z), \quad \nabla^2 \bar{I}_0 = 0, \quad \nabla^2 \bar{I}_z = 0, \quad \nabla^2 \bar{I} = 0 \end{aligned} \right\} \dots (3)$$

5. 板の中央面に関して反対称の一般化平面応力解 つり合い方程式および適合条件式より厳密に求めることができ、変位成分、せん断力、曲げモーメントおよび捻りモーメントを省略して示すと次のとおりである。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{rz} &= \frac{\beta_n}{2} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \cos \beta_n z \cdot \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{I}_n}{\partial \theta}, \quad \sigma_{\theta z} = -\frac{\beta_n}{2} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \cos \beta_n z \cdot \frac{\partial \bar{I}_n}{\partial r}, \quad \sigma_{rr} = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \sin \beta_n z \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \bar{I}_n}{\partial \theta} \right) \\ \sigma_{r\theta} &= -\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{2} \sin \beta_n z \left(\frac{\partial^2 \bar{I}_n}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{I}_n}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \bar{I}_n}{\partial \theta^2} \right), \quad \sigma_{\theta\theta} = -\sigma_{rr}, \quad \sigma_{zz} = 0 \\ \text{ここで} \quad \nabla^2 \bar{I}_n - \beta_n^2 \bar{I}_n &= 0, \quad \beta_n = n\pi/h, \quad (n=1, 3, 5, \dots) \end{aligned} \right\} \dots (4)$$

6. 境界条件 $\theta = \pm \mu$ の2直線辺が単純支持,
 $r = a$, θ の2円弧辺が自由の扇形厚板が中央に部分分布荷重を担った場合について考えると, 境界条件および荷重条件は次のとおりである.

$\theta = \pm \mu$ において

$$u = 0, T_{\theta\theta} = 0, w = 0, \partial u / \partial r = 0, M_r = 0$$

$r = a$, θ において

$$T_{rr} = 0, S_{r\theta} = 0, M_r = 0, M_{r\theta} = 0, Q_r = 0$$

$$(\sigma_{zz})_{z=\pm h/2} = -p(r, \theta), (\sigma_{zz})_{z=\pm h/2} = 0$$

$$(\sigma_{rz})_{z=\pm h/2} = 0, (\sigma_{\theta z})_{z=\pm h/2} = 0$$

7. 数値計算例 中心角 2μ , 内半径 a , 外半径 b , 直線辺長 d , 厚さ h の扇形厚板が中央に部分分布荷重 (中心角 2δ , 幅 b , 強度 p) を担った場合について, $\mu = \pi/4$, $\delta = \pi/16$, $b/a = 8.0$, $c = d/4$, $\nu = 0.17$ とし計算した。図-1および図-2には, それぞれモーメント $M_{\theta r}$ およびせん断力 Q_r の分布を示した。図-1および図-2より, 自由辺の境界条件の相違が自由辺よりかなり離れた位置における断面力にまで影響していることがわかる。図における *old method* は自由辺の曲げに関する境界条件を曲げモーメントと反力の二つの条件で規定した方法, *new method* は先に示した三つの条件を規定した方法である。図-3は, 板厚方向におけるせん断応力 σ_{rz} の分布を示したものであり, 本解法が3次元応力解析^(注)による結果と良く一致していることがわかる。図-4は, 本解法方法の精度を検討するために, 極度に厚い扇形厚板 ($d/h = 2.0$) の σ_{rr} について比較したものである。上面を除けば, 両者が良く一致していることがわかる。図-1から図-4を通じ, 本解法が扇形中等厚板の一つの有用な解析方法であることが明らかになった。

(注) 三宅知子・園村 勇: 3次元弾性論に基づく扇形厚板の応力と変形について, 第29回応用力学連合講演会, 昭54年11月。

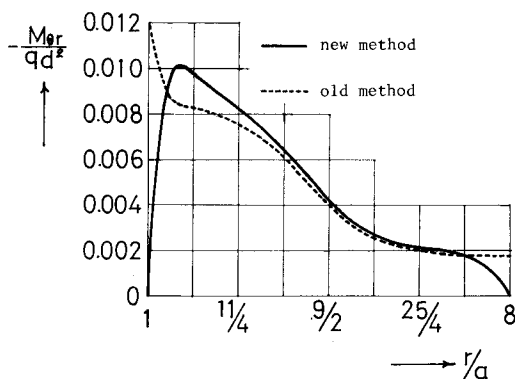


図-1 $\theta = \pi/8$ における $M_{\theta r}$ の分布 ($d/h = 5.0$)

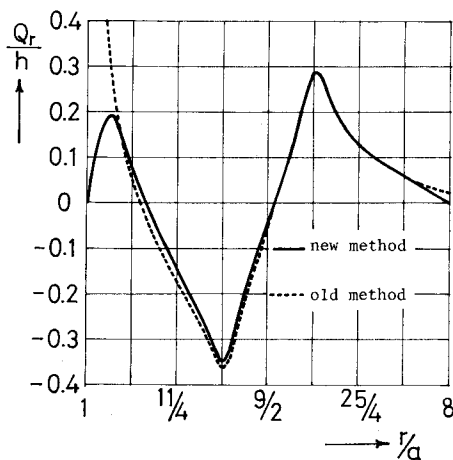


図-2 $\theta = 0$ における Q_r の分布 ($d/h = 5.0$)

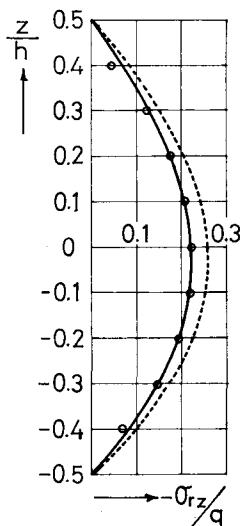


図-3 $\theta = 0, r/a = 11/4$ における σ_{rz} の分布 ($d/h = 5.0$)

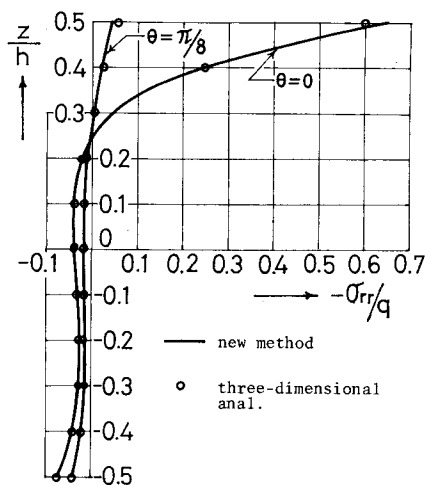


図-4 $r/a = 9/2$ における σ_{rr} の分布 ($d/h = 2.0$)