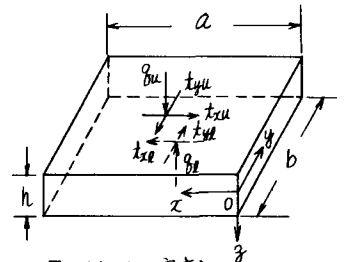


大阪市立大学 正員 堀川 都志雄
大阪市立大学 正員 園田 恵一郎

1. はしがき 既に、著者らは直交異方弾性体に物体力が作用する場合の変位関数を用いて得られる解と境界条件を満足させる為にライスナー理論における同次解とをハイブリッドする方法を提案し、この方法により、相対2辺が固定で残りの2辺が単純支持されている直交異方性板に自重が作用する問題の解析を行った。¹⁾ 本研究では、横荷重を受ける相対2辺が自由で残りの2辺が単純支持の直交異方性板の解析を同様のハイブリッド法により行う。

2. 理論式 I) ライスナー理論 (同次解として用いる) 直交異方弾性板に図-1に示される荷重が作用する場合のライスナー理論は、i) 曲げ問題と ii) 引張り問題の2つに分けて考えることができる。板の中央面内に x, y 軸をとり、それと垂直に z 軸をとる。記号は文献1)を参照。



i) 曲げ問題 変位関数；

$$\left\{ D_{11} \partial_x^4 + 2D_{12} \partial_x^2 \partial_y^2 + D_{22} \partial_y^4 - D_{11} E'_{23} \partial_x^2 - \{ D_{11} (E_{22} - E_{12} - E_{23}) + D_{12} (E_{11} - E_{12}) \} \partial_x^2 \partial_y^2 - \{ D_{12} (E_{22} - E_{12}) + D_{22} (E_{11} - E_{12} - E_{23}) \} \partial_x^2 \partial_y^2 - D_{22} E'_{23} \partial_y^2 \right\} \Phi = - \times \quad (1)$$

ここに z 、 $\partial_x = \partial/\partial x$ 、 $\partial_y = \partial/\partial y$ 、-----、 $\partial_y^2 = \partial^2/\partial y^2$ 、

$\Phi = \Phi_1 \bar{i} + \Phi_2 \bar{j} + \Phi_3 \bar{k}$ 、 $\times = X_1 \bar{i} + X_2 \bar{j} + X_3 \bar{k}$ 、 $X_1 = g_m - \bar{z}$ 、

$$X_2 = -\frac{1}{6} \left\{ \frac{1}{6} (E_{11} \partial_x^2 + E_{23} \partial_y^2) - 1 \right\} t_{xp} + \frac{1}{6} (E'_{12} + E'_{23}) \partial_x \partial_y t_{yp}$$

$$- F_{33} \left\{ \partial_x (g_m - \frac{1}{6} \bar{z}) + \frac{1}{12} \partial_x (\partial_x t_{xp} + \partial_y t_{yp}) \right\},$$

$$X_3 = -\frac{1}{6} \left\{ \frac{1}{6} (E_{12} + E_{23}) \partial_x \partial_y t_{xp} \right\} + \left\{ \frac{1}{6} (E'_{23} \partial_x^2 + E_{22} \partial_y^2) - 1 \right\} t_{yp} - F_{33} \left\{ \partial_y (g_m - \frac{1}{6} \bar{z}) + \frac{1}{12} \partial_y (\partial_x t_{xp} + \partial_y t_{yp}) \right\}.$$

変位関数とたわみおよび断面力の関係式；

$$W = \left\{ E_{11} E'_{23} \partial_x^4 + \{ E_{11} E_{22} + E_{23} E'_{23} - (E'_{12} + E'_{23}) (E_{12} + E_{23}) \} \partial_x^2 \partial_y^2 + E_{22} E_{23} \partial_y^4 - (E_{11} + E'_{23}) \partial_x^2 - (E_{22} + E_{23}) \partial_y^2 + 1 \right\} \Phi_1$$

$$+ \partial_x \left\{ E'_{23} \partial_x^2 + (E_{22} - E_{12} - E_{23}) \partial_y^2 - 1 \right\} \Phi_2 - \partial_y \left\{ (E_{11} - E'_{12} - E_{23}) \partial_x^2 + E_{23} \partial_y^2 - 1 \right\} \Phi_3,$$

$$Q_x = \partial_x \left\{ D_{11} E'_{23} \partial_x^4 + (D_{11} E_{22} - D_{12} E'_{12}) \partial_x^2 \partial_y^2 + \{ D_{11} E_{22} - D_{22} (E'_{12} + E'_{23}) \} \partial_y^2 - (D_{11} \partial_x^2 + D_{12} \partial_y^2) \right\} \Phi_1$$

$$- \partial_y^2 \{ D_{12} \partial_x^2 + D_{22} \partial_y^2 \} \Phi_2 + \partial_x \partial_y \{ D_{11} \partial_x^2 + D_{12} \partial_y^2 \} \Phi_3,$$

$$Q_y = \partial_y \left\{ \{ D_{12} E_{11} - D_{11} (E_{12} + E_{23}) \} \partial_x^2 + (D_{22} E_{11} - E_{12} D_{12}) \partial_x^2 \partial_y^2 + D_{22} E_{23} \partial_y^4 - (D_{12} \partial_x^2 + D_{22} \partial_y^2) \right\} \Phi_1$$

$$+ \partial_x \partial_y \{ D_{12} \partial_x^2 + D_{22} \partial_y^2 \} \Phi_2 - \partial_x^2 \{ D_{11} \partial_x^2 + D_{12} \partial_y^2 \} \Phi_3 \quad (2)$$

ii) 引張り問題 変位関数；

$$\left\{ a_{11}/a_{22} \partial_x^2 + (a_{11} a_{22} - 2a_{12} a_{44} - a_{12}^2)/a_{22} a_{44} \partial_x^2 \partial_y^2 + \partial_y^2 \right\} \Psi = -2C_{44}/a_{22} \cdot Y \quad (3)$$

ここに z 、 $\Psi = \Psi_1 \bar{i} + \Psi_2 \bar{j}$ 、 $Y = Y_1 \bar{i} + Y_2 \bar{j}$ 、 $Y_1 = t_{xm}/h$ 、 $Y_2 = t_{ym}/h$ 。

変位と変位関数の関係式；

$$2C_{44} u^d = (\partial_x^2 + a_{22}/C_{44} \partial_y^2) \Psi_1 - (1 + a_{12}/C_{44}) \partial_x \partial_y \Psi_2, \quad 2C_{44} v^d = -(1 + a_{12}/C_{44}) \partial_x \partial_y \Psi_1 + (a_{11}/C_{44} \partial_x^2 + \partial_y^2) \Psi_2 \quad (4)$$

以上の式より、断面力 M_y 、 M_{xy} 、 N_y および N_{xy} は次のように与えられる。

$$M_y = -\{ \bar{D}_{12} \partial_x^2 + D_{22} \partial_y^2 \} W + E_{12} \partial_x Q_x + E_{22} \partial_y Q_y - \frac{h}{12} (E_{12} \partial_x t_{xp} + E_{22} \partial_y t_{yp}) - F_{33} (g_m - \frac{1}{6} \bar{z}) - \frac{h}{12} F_{33} (\partial_x t_{xp} + \partial_y t_{yp}),$$

$$M_{xy} = -2\bar{D}_{12} \partial_x \partial_y W + E'_{23} \partial_y Q_x + E'_{23} \partial_x Q_y - \frac{h}{12} (E_{23} \partial_y t_{xp} + E'_{23} \partial_x t_{yp}),$$

$$N_y = h/2C_{44} \left\{ (a_{12} \partial_x^2 - a_{22} \partial_y^2) \partial_x \Psi_1 + \{ a_{22} \partial_y^2 + (a_{11} a_{22} - a_{12}^2 - a_{12} C_{44}) \partial_x^2 \} \partial_y \Psi_2 \right\},$$

$$N_{xy} = h/2C_{44} \left\{ (a_{22} \partial_y^2 - a_{12} \partial_x^2) \partial_y \Psi_1 + \{ a_{11} \partial_x^2 - a_{12} \partial_y^2 \} \partial_x \Psi_2 \right\} \quad (5)$$

ここに $\bar{D}_{12} = \bar{D}_{12} + 2\bar{D}_{12}'$

II) 3次元理論(特解として用いる)

外荷重の局所的な挙動を表現する為に、直交異方弾性体における変位関数¹⁾を用いる。

○変位関数；

$$\nabla^6(x, y, z) F = -2B_5B_7/B_1B_4 B \quad (6)$$

ここで、 $F = F_1\hat{i} + F_2\hat{j} + F_3\hat{k}$, $B = X\hat{i} + Y\hat{j} + Z\hat{k}$ (=物体力ベクトル)

$\nabla^6(x, y, z)$ は 6階の偏微分演算子である。

○変位と変位関数の関係式； 簡単の為に、式(6)で示される関数のうち F_3 のみとすれば、

$$\begin{aligned} 2B_5U &= -\partial_x\partial_z\left\{B_4B_8/B_5B_7\partial_x^2 + (B_2B_8-B_7B_9)/B_5B_7\partial_y^2 + B_6B_9/B_5B_7\partial_z^2\right\}F_3, \\ 2B_5V &= -\partial_y\partial_z\left\{(B_1B_7-B_7B_8)/B_5B_7\partial_x^2 + B_4B_9/B_5B_7\partial_y^2 + B_9/B_7\partial_z^2\right\}F_3, \\ 2B_5W &= \left\{(B_1/B_5\partial_x^2 + B_4/B_5\partial_y^2 + \partial_z^2)(B_4/B_7\partial_x^2 + B_2/B_7\partial_y^2 + B_4/B_7\partial_z^2) - B_7/B_5\partial_x^2\partial_y^2\right\}F_3 \end{aligned} \quad (7)$$

関数 F_3 を x, y 方向に三角級数で、 z 方向には e のべき乗で表わすことに關する 6 次の代数式を得る。これを解くことによって例えば次のような式を得る。

$$F_3 = \sum_m \sum_n \left[C_1 \cosh \lambda_1 z + C_2 \sinh \lambda_1 z + (C_3 \cosh \lambda_2 z + C_4 \sinh \lambda_2 z) \cos \lambda_3 z + (C_5 \cosh \lambda_2 z + C_6 \sinh \lambda_2 z) \sin \lambda_3 z \right] \sin \alpha_m x \sin \beta_n y \quad (8)$$

ここで、 $\alpha_m = m\pi/a$, $\beta_n = n\pi/b$, $\pm \lambda_i (i=1, 2, 3)$ は z に関する特性方程式の根であり、 $C_1, \dots, C_6$ は板の上・下面の境界条件より決定される定数である。

III) 境界条件式

3次元理論による解(p)とライスナー理論の同次解(h)とを重ね合せて境界条件を満足させるように同次解の係数即ち式(1)および(3)より得られる 10 の未定定数を決定すればよい。自由辺に対しては、次のように示される。

$$\text{○曲げ問題； } M_y^p + M_y^h = 0, \quad M_{xy}^p + M_{xy}^h = 0, \quad Q_y^p + Q_y^h = 0 \quad (9)$$

$$\text{○引張り問題； } N_y^p + N_y^h = 0, \quad N_{xy}^p + N_{xy}^h = 0 \quad (10)$$

3数値計算例 相対 2 辺が自由で残りの 2 辺が単純支持されている直交異方性板 ($b/a=1.0$, $h/a=0.2$) の中央部に正方形の部分荷重 ($C/a=0.1$, 荷重量積 0.1×0.1) が作用している場合の荷重点近傍の応力状態を図-2 に示す。なお、板は $y=0$, b で自由辺をもち、 $x=0$, a で単純支持されており、材料定数は以下のものを用いる。 $C12/C11=0.5714$, $C13/C11=0.7143$, $C22/C11=2.1429$, $C23/C11=1.2857$, $C33/C11=2.5714$, $C44/C11=0.2857$, $C55/C11=0.5714$, $C66/C11=0.7143$ 。

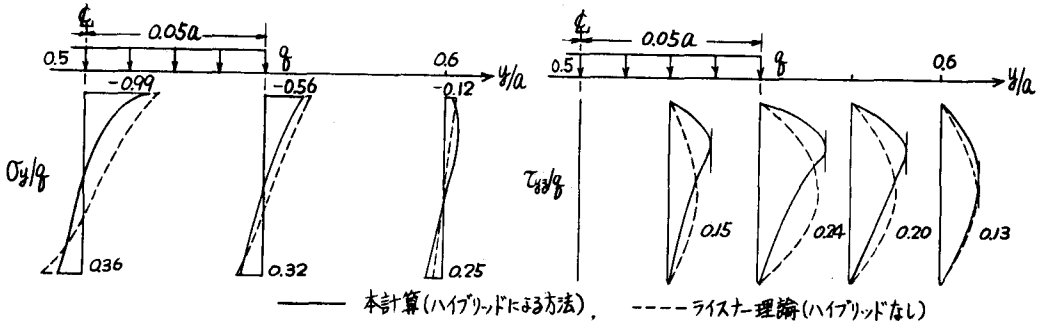


図-2

4.付記 S.A. Ambartsumyan によって誘導された変位関数は、本研究のライスナー理論の関数と一致しているが、垂直応力 σ_z の影響即ち式(1)の右辺の X_2 および X_3 が存在することより、この関数のみでは不十分であり他の関数と必要となる。

1) 堀川・園田：直交異方性厚板の三次元応力解析，第34回年次学術講演会，昭和54年。

2) Ambartsumyan, S.A.: Theory of Anisotropic Plate, Technomic, pp.19-40, 1970.