I-48　　平板曲げの精密化理論

秋田大学　土木工学科　正員　○長谷部　薫
秋田大学　土木工学科　正員　稼農知徳
秋田大学　土木工学科　正員　薄木征三

1. はじめに　せん断変形の影響を考慮した平板曲げの精密化理論については多くの研究者により発表されているが、いずれも変位または応力状態を板厚方向にわたって仮定して支配方程式を求めている。そこで本報告はこれまでの多くの報告にはみられない理論的アプローチの方法を考えて、平板曲げの精密化理論を展開したものである。本報告の理論体系は、古典平板曲げ理論を第１近似理論と考え、かつ平板の板厚方向直応力 $\sigma_z=0$ を仮定して、応力の平衡条件式を満足するようにせん断応力を修正し、これに基づいた修正変位場を誘導する。これらの得られた変位場より、ひずみ成分および応力成分を求めるが、得られる修正応力成分は依然として応力の平衡条件式を厳密には満足していないので、再び同様の手段を繰り返す逐次近似理論となっている。本報告においては第２近似理論で十分に収束していることが確認されたので、仮想仕事の原理を適用して平板の支配方程式を誘導した。本報告で用いた仮定は（1）変形した平板のたわみは平板の厚さに比べて小さいものとし、中央面内での伸縮は曲げ変形に対して微小なものとして無視する。（2）中央面に垂直方向の応力 σ_z は中央面に平行の応力に比べてきわめて小さいので無視する

2. 平板の変位関数とKirchhoff-Loveの仮定

微小変位理論におけるひずみ-変位関係式は次のように表わされる。

$$\varepsilon_x=U_{,x},\ \varepsilon_y=V_{,y},\ \varepsilon_z=W_{,z},\ \gamma_{xy}=V_{,x}+U_{,y}$$
$$\gamma_{yz}=W_{,y}+V_{,z},\ \gamma_{zx}=U_{,z}+W_{,x} \qquad (1)$$

ここで $(\ )_{,x}=\partial(\ )/\partial x$ などとする。

式(1)でKirchhoff-Loveの仮定を用い、また鉛直方向の変位 W は厚さ方向座標 Z に無関係であると仮定されるので $W(x,y,z)=w(x,y)$ とすると、ひずみ-変位関係式は次のように表わされる。

$$\varepsilon_x=u_{,x}-z\cdot w_{,xx},\ \varepsilon_y=v_{,y}-z\cdot w_{,yy},\ \varepsilon_z=0$$
$$\gamma_{xy}=u_{,y}+v_{,x}-2z\cdot w_{,xy},\ \gamma_{yz}=0,\ \gamma_{zx}=0 \qquad (2)$$

3. Hookeの法則と応力平衡条件式

一般化されたHookeの法則を用い、平面応力の単純化を行なって応力とひずみの関係を表わすと

$$\sigma_x=\frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_x+\nu\varepsilon_y),\ \sigma_y=\frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_y+\nu\varepsilon_x)$$
$$\tau_{xy}=G\gamma_{xy} \qquad (3)$$

応力の平衡条件式は、３次元弾性論より体積力は無視されるものとして

$$\sigma_{x,x}+\tau_{xy,y}+\tau_{zx,z}=0$$
$$\tau_{xy,x}+\sigma_{y,y}+\tau_{yz,z}=0$$
$$\tau_{zx,x}+\tau_{yz,y}+\sigma_{z,z}=0 \qquad (4)$$

式(2),(3)から得られる応力成分は、式(4)の応力の平衡条件式を厳密には満足していない。従って応力の平衡条件式を満足するようにせん断応力を修正して、これに基づいた修正変位場を誘導することにする。

4. 修正変位関数とひずみ成分

式(2)における変位 u,v,w は古典理論から得られるものとして第１近似変位とし、添字１を付して区別する。式(2)を式(3)に代入し、応力の平衡条件式(4)に代入して Z に関して積分すると

$$\gamma_{zx}=-\frac{1}{1-\nu}\left(\frac{h^2}{4}-z^2\right)\psi_{,x}$$
$$\gamma_{yz}=-\frac{1}{1-\nu}\left(\frac{h^2}{4}-z^2\right)\psi_{,y} \qquad (5)$$

ここで $\psi(x,y)=\Delta w_1(x,y)=\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)w_1(x,y)$

を定義して新しい自由度を導入している。

次に準平面応力状態を仮定して、ひずみ成分 ε_z を $\sigma_z=0$ から求めると

$$\varepsilon_z=\frac{\nu}{1-\nu}z\cdot\psi \qquad (6)$$

式(5),(6)を式(1)に代入して Z に関して積分すると次のように修正された変位関数 U,V,W が求められる。

$$U(x,y,z)=u(x,y)-z\cdot w_{,x}-\frac{h^3}{12(1-\nu)}\left\{3\left(\frac{z}{h}\right)+2(3\nu-2)\left(\frac{z}{h}\right)^3\right\}\psi_{,x}$$
$$V(x,y,z)=v(x,y)-z\cdot w_{,y}-\frac{h^3}{12(1-\nu)}\left\{3\left(\frac{z}{h}\right)+2(3\nu-2)\left(\frac{z}{h}\right)^3\right\}\psi_{,y}$$
$$W(x,y,z)=w(x,y)+\frac{\nu}{1-\nu}\frac{z^2}{2}\psi \qquad (7)$$

修正ひずみ成分は式(1)より次のように表わせる。

$$\varepsilon_x = u_{,x} - z\cdot w_{,xx} - \frac{h^3}{12(1-\nu)}\left\{3\left(\frac{z}{h}\right)+2(3\nu-2)\left(\frac{z}{h}\right)^3\right\}\psi_{,xx}$$

$$\varepsilon_y = v_{,y} - z\cdot w_{,yy} - \frac{h^3}{12(1-\nu)}\left\{3\left(\frac{z}{h}\right)+2(3\nu-2)\left(\frac{z}{h}\right)^3\right\}\psi_{,yy}$$

$$\gamma_{xy} = u_{,y} + v_{,x} - 2z\cdot w_{,xy} - \frac{h^3}{6(1-\nu)}\left\{3\left(\frac{z}{h}\right)+2(3\nu-2)\left(\frac{z}{h}\right)^3\right\}\psi_{,xy}$$

$$\gamma_{zx} = -\frac{h^2}{4(1-\nu)}\left\{1-4(1-\nu)\left(\frac{z}{h}\right)^2\right\}\psi_{,x}$$

$$\gamma_{yz} = -\frac{h^2}{4(1-\nu)}\left\{1-4(1-\nu)\left(\frac{z}{h}\right)^2\right\}\psi_{,y} \qquad (8)$$

修正応力成分は、式(8)のひずみ成分を式(3)に代入することによって求めることができる。

5．仮想仕事の原理とつり合い方程式

式(8)のひずみ成分を用い、仮想仕事の原理によってつり合い方程式と境界条件式を求める。

$$\int_0^{l_x}\int_0^{l_y}\int_{-h/2}^{h/2}\left\{\sigma_x\delta\varepsilon_x+\sigma_y\delta\varepsilon_y+\tau_{xy}\delta\gamma_{xy}+\tau_{yz}\delta\gamma_{yz}+\tau_{zx}\delta\gamma_{zx}\right\}dx\,dy\,dz-\int_0^{l_x}\int_0^{l_y}\int_{-h/2}^{h/2}\left\{q_{xd}\delta U+q_{yd}\delta V+q_{zd}\delta W\right\}dx\,dy\,dz=0 \qquad (9)$$

上式に式(8)のひずみ成分を代入し、Green の定理,部分積分等を適用すると、次のようなつり合い方程式が得られる。

$$N_{x,x}+N_{xy,y}+q_x=0$$

$$N_{xy,x}+N_{y,y}+q_y=0$$

$$M_{x,xx}+2M_{xy,xy}+M_{y,yy}+q_z+m_{x,x}+m_{y,y}=0$$

$$H_{x,xx}+2H_{xy,xy}+H_{y,yy}+h_{x,x}+h_{y,y}-\frac{6(1-\nu)}{2(3-\nu)}(S_{x,x}+S_{y,y})-\frac{3\nu}{(2-3\nu)}n_z=0 \qquad (10)$$

ここで、Nx,Ny,Nxy,Mx,My,Mxy は従来より知られている合応力度関数(断面力)であるが、本法では新しく次のような合応力度関数を定義している。

$$S_x=\int_{-h/2}^{h/2}\tau_{xz}\cdot z^2dz,\quad S_y=\int_{-h/2}^{h/2}\tau_{yz}\cdot z^2dz,$$

$$H_x=\int_{-h/2}^{h/2}\sigma_x\cdot z^3dz,\quad H_y=\int_{-h/2}^{h/2}\sigma_y\cdot z^3dz,$$

$$H_{xy}=\int_{-h/2}^{h/2}\tau_{xy}\cdot z^3dz \qquad (11)$$

また、q_x, q_y 等は次のように定義している。

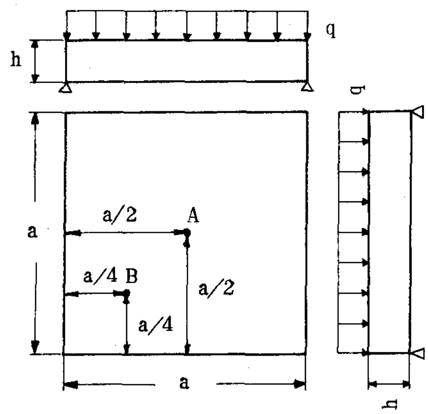
$$q_x=\int_{-h/2}^{h/2}q_{xd}\,dz,\quad q_y=\int_{-h/2}^{h/2}q_{yd}\,dz,$$

$$q_z=\int_{-h/2}^{h/2}q_{zd}\,dz,\quad m_x=\int_{-h/2}^{h/2}q_{xd}\cdot z\,dz,$$

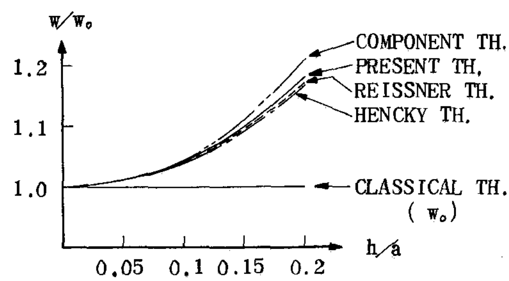
$$m_y=\int_{-h/2}^{h/2}q_{yd}\cdot z\,dz,\quad n_z=\int_{-h/2}^{h/2}q_{zd}\cdot z^2dz,$$

$$h_x=\int_{-h/2}^{h/2}q_{xd}\cdot z^3dz,\quad h_y=\int_{-h/2}^{h/2}q_{yd}\cdot z^3dz \qquad (12)$$

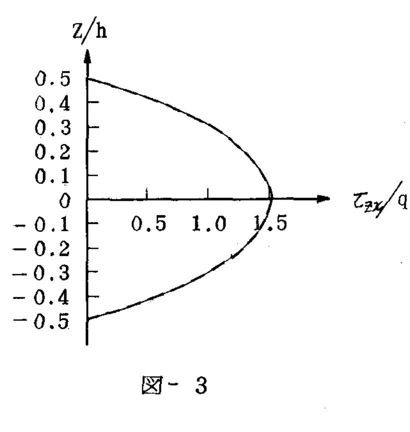
6．数値計算例 図－1のような四辺単純支持正方形板の全表面上に等分布荷重載荷の場合を考える。図－2は A点でのたわみに関して、古典理論から得られるたわみを1.0 としたの計算結果を表わしている。図－3は板厚 h＝a／10 の場合の B 点でのせん断応力 τ_{zx} を示したものである。実線は古典理論における修正せん断応力で、それを更に修正したものを破線で表わしており、解の収束性を確認することができる。



図－1



図－2



図－3