

(株) 神戸製鋼所 正会員 ○ 中 西 宏
同 同 波 田 凱 夫

1. まえがき 本報は、ケーブル構造を解析するための一つの新しい要素モデルを提案し、その実用性について検討を加えたものである。本報で提案するのは3節点の曲線要素であり、その変位場は2次式で与えられる。また、要素内を2つの領域に分け、それぞれの内部では応力が一定であるとする。このモデルを用い、Hellinger-Reissnerの原理に基づく混合法によってケーブル構造の大変形解析を行なう。また、このモデルによるケーブル構造の非線形振動解析法についても言及する。

分布荷重によるケーブルの湾曲を考慮した大変形解析法に関する研究には、前田¹⁾、後藤²⁾、阿井³⁾、Henghold⁴⁾、Gambin⁵⁾らのものがあり、それぞれ特徴ある解析法が提示されている。これらの研究を踏まえ、本報では、要素の湾曲度の大きいケーブル部材を含む構造物について、任意の荷重に対する静的大変形さらには動的応答を求める解析を行なう。

2. 曲線要素を用いたケーブル構造の大変形解析

ケーブル構造の解析において通常設けられる仮定、

①ケーブル断面内の各点で応力は一定で、ケーブル軸方向のみの応力が存在する。

②ケーブル断面内の各点で変位は等しい。

③ケーブル断面積はひずみ状態によらず一定である。とここで採用する。また、ひずみ-変位関係および応力-ひずみ関係として

$$\epsilon = (ds - ds_0) / ds_0 \quad (1)$$

$$\sigma = E \epsilon \quad (2)$$

ととる。ここで、 ϵ は伸びひずみで、初期ひずみからひずみ増分、 ds 、 ds_0 、 ds はそれぞれ変形状態、初期状態、無応力状態の線素の長さ、 σ_0 は初期応力からの応力の増分、 E はヤング係数を表す。分布荷重 w_0 は仮定より、

$$w_{0i} = A_0 s_i F_{0i} + \int \bar{T}_{0i} d\phi \quad (3)$$

である。ここで、 A_0 、 s_i および F_{0i} はそれぞれケーブルの断面積、密度および単位質量当りの物体力、 \bar{T}_{0i} は単位表面積当りの表面力と、 $d\phi$ はケーブル外周に沿う積分と、添字*i*は直交デカルト座標の各座標軸(X、Y、Z)方向を、添字0は無応力状態を表す。

さて、上述の仮定を満足する線材に対するHellinger-Reissnerの汎関数を Π_R とし、初期状態(初期形状、初期応力)を基準にとってこれを示すと、

$$\begin{aligned} \Pi_R = A_0 \int [(\sigma_0 + \sigma) \epsilon - W(\sigma)] ds_0 - \int w_{0i} u_i ds_0 - A_0 (\bar{T}_{0i} u_i)_{s_0=0} \\ - A_0 (\bar{T}_{0i} u_i)_{s_0=L_0} \quad (4) \end{aligned}$$

ただし、図1に示すように座標 s_0 、 $\bar{T}_{0i} u_i$ をとり、力学的境界条件のみを考慮して線材の両端の断面に作用する

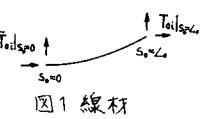


図1 線材

表面力を $\bar{T}_{0i} u_i$ および $\bar{T}_{0i} u_i$ としている。また、 σ_0 は初期応力、 $W(\sigma)$ はコンプレミナリエネルギーで、 $W_c(\sigma) = \frac{1}{2E} \sigma^2$ 、 u_i は初期形状からの変位を表す。

つぎに、図1の線材を1要素と見て、その要素内の変位と応力を近似する。(i)図2に示すように、

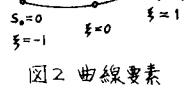


図2 曲線要素

線材を3節点要素とし、要素内の各点の座標および変位を各節点の座標および変位によって補間する。(ii)要素を2つの領域に分け、それぞれの領域で応力を一定とする。すなはち3節点アイソパラメトリック要素として、その応力場を階段状に近似する。この場合、式(4)の Π_R は次式のように表わされる。

$$\Pi_R = A_0 \sum_{i=1}^3 [(\bar{T}_{0i} + \bar{T}_{1i}) \int_{s_0}^{s_i} \epsilon ds_0 - \frac{\epsilon_0}{2E} \bar{T}_{0i}^2] - (F_w + F_c)^T \bar{\sigma} \quad (5)$$

ここで、 \bar{T}_{0i} および \bar{T}_{1i} はそれぞれ各領域において一定な初期応力および応力増分、 ϵ_0 は各領域における要素の無応力長を表す。また、

$$F_w = [\frac{\partial}{\partial u_1} w_{0i} ds_0 \quad \frac{\partial}{\partial u_2} w_{0i} ds_0 \quad \dots \quad \frac{\partial}{\partial u_{3i}} w_{0i} ds_0]^T$$

$$F_c = [A_0 \bar{T}_{13} \circ A_0 \bar{T}_{12} \circ A_0 \bar{T}_{23} \quad A_0 \bar{T}_{31} \circ A_0 \bar{T}_{32}]^T$$

$$\bar{\sigma} = [u_{11} \quad u_{12} \quad u_{13} \quad u_{21} \quad u_{22} \quad u_{23} \quad u_{31} \quad u_{32} \quad u_{33}]^T$$

u_{11} 、 u_{12} 、 u_{13} は節点1のX、Y、Z方向の変位、 u_{21} 、 u_{22} 、 u_{23} および u_{31} 、 u_{32} 、 u_{33} はそれぞれ節点2および3の変位を表す。 \bar{T}_{0i} について式(5)の Π_R の停留をとると、

$$\bar{T}_{0i} = \frac{E}{L_{on}} \int_{s_0}^{s_i} \epsilon ds_0 = \frac{E}{L_{on}} \bar{\epsilon}_i \quad (6)$$

が得られる。ここで、 $\bar{E}_n = \int_{\text{要素}} E \, ds$ 。式(6)を式(5)に代入すると、

$$\pi_R = A_0 \sum_{n=1}^3 (\bar{E}_{on} \bar{E}_n + \frac{E}{2} \bar{E}_n^2) - (F_w + F_c) \delta \quad (7)$$

つまり式は、式(7)の π_R の総和と全要素についてとり、それを節点変位で微分して得られる。いま、式(7)を3節点の変位まで微分すれば、

$$\frac{\partial \pi_R}{\partial \delta} = A_0 \sum_{n=1}^3 (\bar{E}_{on} + \frac{E}{2} \bar{E}_n) \begin{bmatrix} \psi_{1,n} \\ \psi_{2,n} \\ \psi_{3,n} \end{bmatrix} - (F_w + F_c) \quad (8)$$

ここで、 $\psi_{1n} = [\frac{\partial \bar{E}_n}{\partial u_{11}} \frac{\partial \bar{E}_n}{\partial u_{12}} \frac{\partial \bar{E}_n}{\partial u_{13}}]^T$ 、 $\psi_{2n} = [\frac{\partial \bar{E}_n}{\partial u_{21}} \frac{\partial \bar{E}_n}{\partial u_{22}} \frac{\partial \bar{E}_n}{\partial u_{23}}]^T$ 、 $\psi_{3n} = [\frac{\partial \bar{E}_n}{\partial u_{31}} \frac{\partial \bar{E}_n}{\partial u_{32}} \frac{\partial \bar{E}_n}{\partial u_{33}}]^T$

式(8)を全要素について重ね合わせて0と置けば、構造全体のつり合式が得られる。本報では、そのつり合式をNewton-Raphson法により解く。ただし、解の発散を防ぐための一つの手法として、反復計算において不つり合力のノルムが急増する場合、解の修正ベクトルの長さを縮小することを行なう。なお、本文では要素内の定応力の領域の数を2としたが、その数をNとし一般的に取り扱うこともできる。このNの値の評価に対しては、つきに一計算例を示す。

3. 数値計算例 計算例1: 図3のカテナリー曲線の支間中央に100tの集中荷重を鉛直下方に作用させる。この計算例では定応力場の領域の数を種々変化させている。図4に構造と4要素9節点としたときの、要素内の定応力の領域の数Nと載荷点の鉛直下方の変位 δ_y との関係を示す。図6に、本報の解析法と棒要素を用いた解析法との解の精度を比較する。これらより、N=2の場合、最も解の精度が高いこと、Nの値を大とすればするほど変位 δ_y は滑らかに減少していくこと、本法は直線棒要素による解析法に比べて精度が高いことなどがわかる。

計算例2: スパン40m、サク比1.955、伸び剛性 $2.55 \times 10^6 t$ 、分布荷重1t/mの懸垂線の中点に水平方向の集中荷重を作用せらる。²³⁾ 図7に、本法の計算結果を○印で、後藤の計算結果を実線で示す。两者は良く一致していると言える。なお、図6には、本法による計算結果の変形状態を示す。図中・印は節点を表わす。

4. 動的応答解析 動的つり合式は前述の静的つり合式に慣性項、減衰項、動的外力の項を付加することにより得られる。とくに減衰力において、ひずみ速度 $\dot{\epsilon}$ に比例する粘性減衰応力 $C\dot{\epsilon}$ が働くと仮定すれば、前述の解析モデルと同様に、

$$C_{cn} = \frac{c}{Z_{on}} \int_{\text{要素}} \dot{\epsilon} \, ds \quad n=1, 2$$

$$\dot{\epsilon}_c = A_0 \sum_{n=1}^3 C_{cn} \begin{bmatrix} \psi_{1n} \\ \psi_{2n} \\ \psi_{3n} \end{bmatrix}$$

を得る。ここに、cは比例常数、 Z_{on} は1要素の9成分の減衰力である。動的つり合式ももちろん非線形となるので直接数値積分法によつて解く。若干の計算例を講演時に紹介する予定である。

- (1)前田、林、前田: 土木学会論文報告集, 第257号, 1977-1, (2)後藤: 土木学会論文報告集, 第270号, 1978-2, (3)附田、西園、奥村: 土木学会論文報告集, 第260号, 1977-4, (4)Henghold, W. H., and J. T. Russell: Computer & Structures, Vol. 6, 1976. (5)Gambier, M. L. and B. Bachelen: Int. J. Num. Mech. in Engineering, Vol. 11, 1977

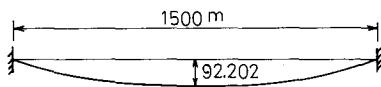


図3 モデル

$$E = 1.5 \times 10^7 \text{ t/m}^2$$

$$A_0 = 0.0468 \text{ m}^2$$

$$\omega_{02} = 0.592 \text{ t/m}$$

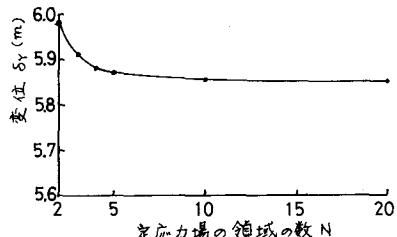


図4 要素内の定応力場の領域の数と載荷点の変位

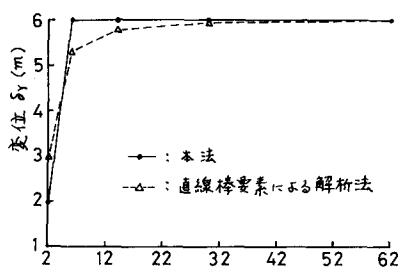


図5 要素分割数と載荷点の変位

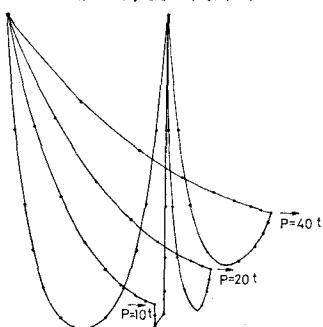


図6 初期形状と変形形状の形状

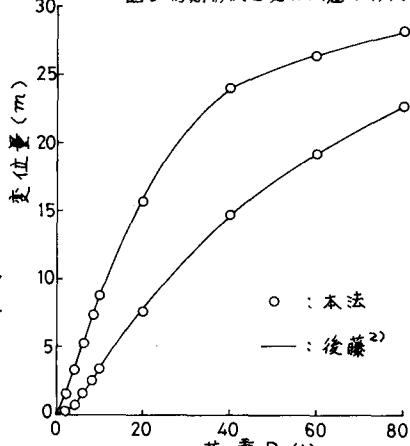


図7 載荷点(支間中央)の変位量