

防衛大学校土木工学教室 正会員 ○石川 信隆

防衛大学校土木工学教室 学生員 永木 欽也

防衛庁第4研究所 正会員 牧野 邦彦

1. 緒言 本報告は、任意の外力荷重を受ける地盤上の有限長ばりの弾塑性解析法の開発を企図したもので、その手法は地盤を集中ばねモデル¹⁾に置換したうえで、線形計画法(LP)による地上の骨組構造の弾塑性解析法²⁾を地盤上のはりの場合に適用しようとするものである。従来、地盤上に横たわるばりの弾塑性挙動を取扱った研究例は以外に少く、草間氏による中央集中荷重のみを受けるばりの解析例³⁾やMaier⁴⁾による途中の荷重経路を無視して最終崩壊時のみの変形を求めた例がある程度である。なお、本研究でははり構造に対する慣用の単弾塑性理論の仮定に従う他に、以下の仮定を用いる。(1)地盤上のはりは、はり要素とばね要素に分割した有限要素の構造モデルに置換できるものとする(図-1(b)参照)。(2)はり要素およびばね要素の挙動はそれぞれ図-2(a),(b)のようなbilinear型の弾塑性体であるとし、地盤には引張力が生じないものとする。したがって、はりとはねは結合されておらず、地盤の浮き上がりは存在しない。

2. 弾塑性解析の基本式 上記の仮定に基づき、従来のLPによる骨組構造の弾塑性解析法²⁾を地盤上のはりの場合に拡張すれば、図-1(b)のようなはり-地盤系構造モデルに対する弾塑性解析の基本式が式(1)のような増分形式として表わされる。

既知数 : $\theta_{ij}, \Delta u_i, e_i, EI_{jk}, K_\ell, M_{pj}^-, N_{p\ell}^-, H_\ell, \bar{M}_j^-, \bar{N}_\ell^-, \bar{\delta}_{p\ell}$ 未知数 : $\Delta M_j^+, \Delta N_\ell, \Delta \theta_{pj}^+ \text{ (or } \phi_j^+), \Delta \delta_{p\ell} \text{ (or } \psi_\ell^+), \Delta u_i$ 目的関数 : $\Delta P \rightarrow \text{maximize}$

制約条件 :

$$\textcircled{E} \quad \sum_{j=1}^s \Delta M_j \cdot \theta_{ij} + \sum_{\ell=1}^b \Delta N_\ell \Delta u_i = \Delta P \cdot e_i \quad (i=1, 2, \dots, m) \quad (1b)$$

$$\textcircled{C} \text{ はり: } \Delta \theta_{pj}^+ - \Delta \theta_{pj}^- - \sum_{i=1}^m \theta_{ij} \Delta u_i + \frac{Q_{ijk}}{EI_{jk}} (Z \Delta M_j + \Delta M_k) = 0 \quad (j=1, 2, \dots, s) \quad (1c)$$

$$\text{地盤: } -\Delta \delta_{p\ell} - \sum_{i=1}^m \Delta u_i \Delta e_i + \frac{1}{K_\ell} \Delta N_\ell = 0 \quad (\ell=1, 2, \dots, b) \quad (1d)$$

$$\textcircled{Y} \text{ はり: } \begin{cases} \Delta M_j - \phi_j^+ = M_{pj}^+ - \bar{M}_j, & -\phi_j^+ \geq 0 \\ -\Delta M_j - \phi_j^- = M_{pj}^- + \bar{M}_j, & -\phi_j^- \geq 0 \end{cases} \quad (j=1, 2, \dots, s) \quad (1e)$$

$$\text{地盤: } -\Delta N_\ell - H_\ell \Delta \delta_{p\ell} - \psi_\ell^+ = N_{p\ell}^- + \bar{N}_\ell + H_\ell \bar{\delta}_{p\ell} \quad (\ell=1, 2, \dots, b) \quad (1f)$$

$$\textcircled{P} \text{ はり: } \begin{cases} \sum_{j=1}^s (M_{pj}^+ - \bar{M}_j) \cdot \Delta \theta_{pj}^+ = \sum_{j=1}^s (M_{pj}^- + \bar{M}_j) \cdot \Delta \theta_{pj}^- = 0 \\ \sum_{j=1}^s \Delta M_j \cdot \Delta \theta_{pj}^+ = \sum_{j=1}^s -\Delta M_j \cdot \Delta \theta_{pj}^- = 0 \end{cases} \quad (j=1, 2, \dots, s) \quad (1g) \quad (1h)$$

$$\text{地盤: } \begin{cases} \sum_{\ell=1}^b (N_{p\ell}^- + \bar{N}_\ell + H_\ell \bar{\delta}_{p\ell}) \cdot \Delta \delta_{p\ell} = 0 \\ \sum_{\ell=1}^b (\Delta N_\ell - H_\ell \Delta \delta_{p\ell}) \cdot \Delta \delta_{p\ell} = 0 \end{cases} \quad (\ell=1, 2, \dots, b) \quad (1i) \quad (1j)$$

$$\Delta \theta_{pj}^+ \geq 0, \Delta \theta_{pj}^- \leq 0, \Delta \delta_{p\ell} \geq 0 \quad (1k)$$

の変形適合条件を表わし、式(1e),(1f)ははり要素およびばね要素に対する降伏条件を、式(1g),(1h)ははり要素に対する塑性流れ条件を示し、式(1i),(1j)はばね要素に対する同条件、例えば式(1g)では前荷重段階でのはり要素端 j の曲げモーメント $\bar{M}_j = M_{pj}^+$ のとき塑性変形が生じ($\Delta \theta_{pj}^+ > 0$)、式(1h)では $\Delta M_j = 0$ のときすなわち降伏線上では $\Delta \theta_{pj}^+ > 0$ で塑性変形が生じ、 $\Delta M_j < 0$ のときは $\Delta \theta_{pj}^- = 0$ となり降伏線外側であることを意味している。ただし、 $\Delta M_j, \Delta N_\ell$ ははり要素端 j の曲げモーメント増分およびばね要素 ℓ のばね力増分； $\theta_{ij}, \Delta u_i, e_i$ は基本機構 i における j 端の仮想回転角、ばね要素 ℓ の仮想変位および仮想外力仕事； $\Delta \theta_{pj}^+, \Delta \theta_{pj}^-, \Delta \delta_{p\ell}$ ははり要素端 j の正側、負側の塑性回転角増分およびばね要素 ℓ の塑性変位増分； Δu_i は基本機構 i に対応するはりのたわみ増分または地盤の沈下量増分； EI_{jk}, Q_{ijk} ははり要素 jk の曲げ剛性および節材長； $K_\ell (= BA_\ell k_\ell)$ はばね要素 ℓ のばね係数($K_{\ell m}$)； $\bar{M}_j^-, \bar{N}_\ell^-, \bar{\delta}_{p\ell}$ は前荷

重段階でのはり要素端の曲げモーメント，はね要素のはね力および塑性変位； ϕ_j^+ , ϕ_j^- , ψ_e ははり要素端の正側，負側およびはね要素の降伏関数； M_{pj}^+ , M_{pj}^- ははり要素端の正側，負側の全塑性モーメント； N_{pe} ($=B\alpha_0\delta_0$) ははね要素の圧縮側の降伏はね力； H_e はひずみ硬化係数； k_0 = 地盤反力係数 (kg/cm^2)； δ_0 = 降伏地盤反力 (kg/cm^2)； α_0, B ははり断面長および幅

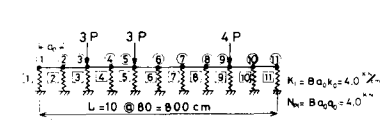
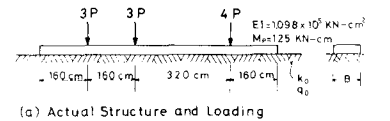
3. 解法手順 上記の式(1)をLPにおけるシンプレックス法で解くためには，未知数を非負の変数に変換する必要がある。(例えば， $\Delta M_j = \Delta M_j^+ - \Delta M_j^-$, $\Delta M_j^+ \geq 0$, $\Delta M_j^- \geq 0$)。また式(1)(2)は除荷の条件を示し，当初 ΔM_j , ΔN_e が未知数なるゆえ繰返し計算を必要とするが，比例荷重の場合は特殊な荷重形式以外は除荷が起らないので，ここではこの両式を考慮しないことにした。よって増分量として得られた未知数に前荷重段階 $\bar{P}$ における値を加算して，現在の荷重段階 $P = \bar{P} + \Delta P$ における諸値が式(2)のように求められ，式(1)の解が $\Delta P = 0$ になるまで計算を続行する。

$$\begin{aligned} M_j &= \bar{M}_j + \Delta M_j, N_e = \bar{N}_e + \Delta N_e, \theta_{pj}^+ = \bar{\theta}_{pj}^+ + \Delta \theta_{pj}^+, \\ \delta_{pe} &= \bar{\delta}_{pe} + \Delta \delta_{pe}, u_i = \bar{u}_i + \Delta u_i \end{aligned} \quad (2)$$

4. 計算例 文献(3)と同様な中央集中荷重を受ける有限長さの弾塑性解析を行なったが，本法による解とほとんど一致することを確認した。よってここでは，任意の荷重を受ける例として図-1(a)のような荷重形式を考える。まず図-1(a)を図-1(b)のような有限要素モデルに置換したうえで，はり要素の挙動を図-2(a)，はね要素の挙動を図-2(b)のように仮定する。つりあい条件式の係数を示すはり-はね系の基本機構は図-3のようになるゆえ，これらをインプットデータとして式(1)をLPにより逐次解けば，崩壊推移過程が図-4 ($H_e = 0$ の場合)，はりのたわみ曲線が図-5 ($H_e = 0$ の場合) のようにえられる。なお図-5の最終崩壊時のたわみ曲線は文献(4)の場合とほぼ一致することを認めた。

5. 結言 (1)本法により任意漸増荷重を受ける地盤上のはりのたわみ挙動が図-5のように容易に解明され，また図-4のような崩壊推移過程も同様に求められる。(2)本法により地盤上のはりのたわみを $u = f(E, B, L, M_p, K_e, N_{pe}, H_e, P)$ の関数として表現でき，特に地盤を K_e , N_{pe} , H_e の3個のパラメータで表わすことが可能となった。(3)本法では弾塑性解析に必要な基本的条件を制約条件としているので，プログラム作成が体系的で分り易く，また荷重増分を目的関数としているので，増分間隔が明瞭であり計算も効率的である。(4)本法は地盤上の格子桁や横荷重を受ける杭の弾塑性解析にも応用拡張できると思われる。

参考文献 1) Bowles, J.E.: Analytical and Computer Methods in Foundation Engineering, McGraw-Hill, 1974, P47. 2) Ishikawa, N.: Load-Deformation Analysis of Elastic-Plastic Frames by Linear Programming, Theoretical and Applied Mechanics, Vol. 23, 1975. 3) 草間孝志: 地盤上のはりの弾塑性挙動に関する基礎的研究 (その1, 2), 日本建築学会論文報告集, 第222号, 1974.8, 第230号, 1975.4. 4) Maier, G. et al.: Mathematical Programming Methods for Deformation Analysis at Plastic Collapse, Computer and Structure, Vol. 7, P599-612, Pergamon Press, 1977.



(b) Discrete Structural Model

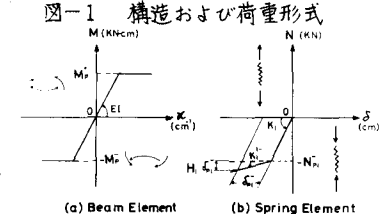


図-2 要素の挙動

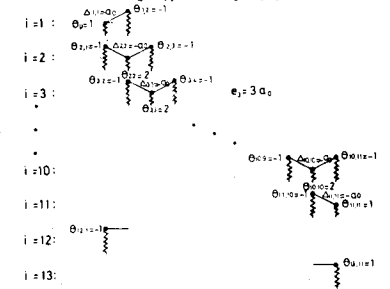


図-3 基本機構

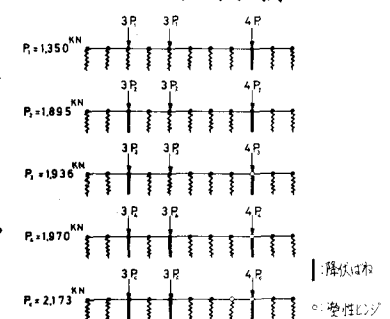


図-4 崩壊推移過程

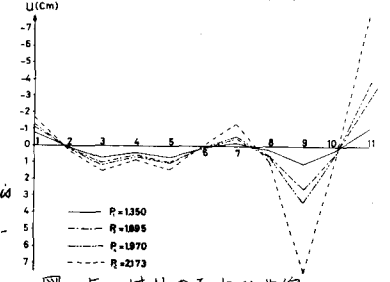


図-5 はりのたわみ曲線