

神戸大学 清水則一 正 北村泰寿 正 桜井春輔

1. まえがき 剛体と半無限弾塑性体の三次元接触問題は数理的取り扱いがきわめて難解であるため、その研究例は見当たらない。本文は、文献1)の研究を弾塑性問題にまで拡張し、初期応力法による弾塑性解析の方法を示したものである。なお、本研究では基礎底面に働く摩擦力は無視する。

2. 解析手順 まず、半無限体中の塑性化が予想される部分に直方体要素(本文では、物体要素と呼ぶ)を予め配置し、以下の手順に従って解析する。

- ① 半無限弾性体上の剛体の変位増分による接触圧分布を文献1)の方法によって求める。
- ② 上記①の接触圧分布に対する物体要素の中心点の応力を計算し加算する。
- ③ 各物体要素の中心点の応力が降伏曲面を越えているかどうかを調べる。降伏曲面を越えている物体要素については、応力を降伏曲面に戻すための応力解放を行う。
- ④ 上記③による解放応力から等価節点力を計算し、各物体要素の応力増分および接触面の変位を求める。
- ⑤ 上記④で求まる応力増分を各物体要素の応力に加算する。そして、応力が降伏曲面に十分近くなるまで③、④の手順をくり返す。
- ⑥ 上記⑤の手順の終了後、解放応力による接触面の変位を修正する。すなわち、応力解放の操作による接触面の変位増分を小さくするのとなさせるまで、①～⑤の手順をくり返す。

次に、上記手順の①～④について詳しく説明しておく。半無限弾性体上に表面 S の剛体構造物が存在する場合、接触圧分布は次式で与えられる。

$$w(x, y) = \iint_S G(x-\xi, y-\eta) P(\xi, \eta) d\xi d\eta \quad (x \in S, y \in S) \quad (1)$$

ここで、 w 、 P は接触面 S 内の既知変位、未知接触圧である。 $G(x-\xi, y-\eta)$ は Boussinesq の解を用いる。しかるに、式(1)は解析的に解けないため、図-1に示すような分割モデルを考える。このとき、式(1)は

$$w_l = \sum_{k=1}^N \bar{G}_{l,k} P_k \quad (l = 1 \sim N, N: \text{分割総数}) \quad (2)$$

となる。なお、上式において分割要素の接触圧は等分布、要素の変位は中央点の値とする。また、 $\bar{G}_{l,k}$ は要素 k の単位等分布荷重による要素 l の変位で、Boussinesq の解を面積分して与えられる。

式(2)から求められる各要素の接触圧分布に対する物体要素中心点の応力は次式で計算される。

$$\sigma_\alpha(x, y, z) = \sum_{k=1}^N P_k \iint_{S_k} \bar{G}_\alpha(x-\xi, y-\eta, z) d\xi d\eta \quad (x \in D, y \in D, z \in D) \quad (3)$$

ここで、 D は半無限体内、 S_k は分割要素の面積、 α は各応力成分を意味する。また、 $\bar{G}_\alpha(x-\xi, y-\eta, z)$ は Boussinesq の解を面積分して与えられる。

塑性理論に基づく弾塑性解析では、降伏後の塑性状態での応力増分とひずみの増分は弾塑性マトリックスを用いて関係づけられる。この際、本研究では、降伏関数に Drucker-Prager、塑性ポテンシャル関数に Von Mises の式を用い、ひずみ硬化率については無視する。初期応力法による解放応力の計算過程は文献2)に譲り、ここではその詳細は省略する。いま、降伏した物体要素の解放応力を $\Delta\sigma'_\alpha$ とすると、各物体要素の応力増分および接触面の分割要素の変位増分はそれぞれ次式で表わされる。

$$\sigma_\alpha(x, y, z) = \sum_{\alpha} \iiint_V \bar{F}_\alpha(x-\xi, y-\eta, z-\zeta) \Delta\sigma'_\alpha d\xi d\eta d\zeta \quad (x \in D, y \in D, z \in D) \quad (4)$$

$$w(x, y, 0) = \sum_{\alpha} \iiint_V \bar{F}_\alpha(x-\xi, y-\eta, -\zeta) \Delta\sigma'_\alpha d\xi d\eta d\zeta \quad (x \in S, y \in S) \quad (5)$$

ここで、 $\sum_{\alpha}$ は各応力成分による総和、 V は降伏した物体要素の体積を意味する。また、 $\bar{F}_\alpha(x-\xi, y-\eta, z-\zeta)$ 、 $F_\alpha(x-\xi, y-\eta, -\zeta)$ には Mindlin の第1解および第2解を用いる。しかるに、式(4)、(5)では物体要素の応力

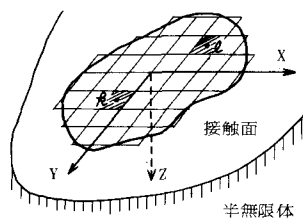


図-1 接触面の分割モデル

$\Delta \alpha$ を一定としても Mindlin 解の体積積分を必要とする。しかし、この積分は困難であるため、本研究では有限要素法における等価節点力計算の概念に準拠して物体要素の節点力を次式のように求める。

$$\{\Delta P\} = \iiint_V [B]^T \{\Delta \sigma\} dV \quad (6)$$

ここで、 $\{\Delta P\}$ は等価節点力、 $[B]$ は節点変位と要素内ひずみの関係を与えるマトリックスである。結局、式(4)、(5)は、式(6)の節点力に対して Mindlin の解を用いて各物体要素の応力および接触面の分割要素の変位を求める問題に帰着する。

3. 計算結果 簡単な計算例として、正方形の底面を有する剛体の次下問題を扱う。また、計算に用いた諸数値は次のような値である。

ヤング係数 $E = 0.981 \text{ GPa}$ (10000 kg/cm^2)、ポアソン比 $\nu = 0.3$ 、

粘着力 $C = 0.490 \text{ MPa}$ (5.0 kg/cm^2)、内部摩擦角 $\varphi = 30^\circ$ 、

底面寸法 $3 \times 3 \text{ m}$ 、単位次下量(変位増分) 1.0 mm

図-2に示す解析モデルのように、接触面の分割要素は同じ大きさの正方形とし、物体要素は分割面と同じ寸法の正方形面をもつ立方体とする。接触面は 10×10 に分割し、要素

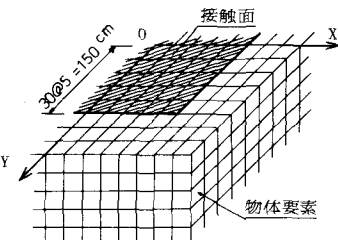


図-2 解析モデル

の辺長は 30 cm である。

図-3は剛体の次下量が増加するときの塑性域発達の一部を明示したものである。同図は図-2において $y = 15 \text{ cm}$, 45 cm , $\dots$, 195 cm を中心ラインとする物体要素を取り出したもので、黒い部分が降伏した要素を示す。次下量 7 mm で底面端部の物体要素($z = 45 \text{ cm}$ の要素)が降伏し、順次下方および中心部に向って塑性化が進む。

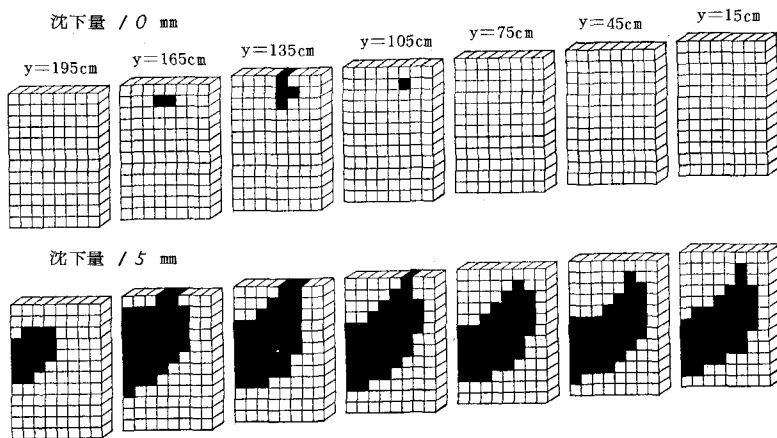


図-3 沈下量増加による塑性域の発達

次に、接触圧の合力と次下量の関係を示したものが表-1である。同表には、地盤を半無限弾性体と仮定した場合の値も併記した。図-3より塑性域が十分に発達した次下量 15 mm の状態になっても接触圧の合力と次下量の関係は弾性解析による結果とほとんど差異のないことがわかる。つまり、地盤反力係数として剛体の次下量と反力の関係を整理する場合には、地盤を弾性体とみなして弾性論を援用し得る可能性が残されていることを示唆していると解釈できる。

4. あとがき 本文の解析法は三次元有限要素法による場合と比較して数量の記憶容量を必要としないため、小規模計算機によっても十分解析できる。しかし、解析手順において述べた③～⑤のくり返し計算は演算時間がガクガクするため、演算速度を早くするための工夫が必要である。本研究では、剛基礎の各次下段階における接触圧の合力を底面積で除して平均化した等分布載荷による弾性解を行い、塑性域の発達等についても調べた。本文では紙面の都合上省略したので、これらについては講演時に報告したい。

参考文献 1) 柳井、北村：土学論, No.175, 1970 2) 川本、林：地盤工学における有限要素法解析, 培風館

表-1 接触圧の合力 (単位 MN)

沈下量	弾塑性解析	弾性解析
7 mm	25.45	25.45
8	29.09	29.09
9	32.73	32.73
10	36.36	36.36
11	39.97	40.00
12	43.56	43.63
13	47.11	47.27
14	50.61	50.91
15	54.13	54.54