

京都大学大学院 学生員 〇 勇 秀憲
 京都大学工学部 正 員 丹羽 義次
 京都大学工学部 正 員 渡辺 英一

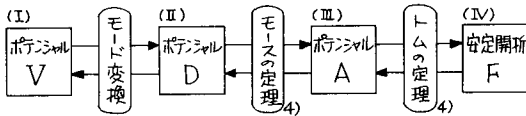
1. はじめに

一般の多自由度系構造物の示す静的な弾性不安定現象を、離散化手法とモード変換法を用いたカタストロフィー解析により把握できることを、筆者らはすでに文献1),2)で論じた。また、その位相幾何学的内容についても示した。³⁾

本報告では、このカタストロフィー解析の概略と簡単な多自由度系モデルによる数値解析結果を述べる。

2. カタストロフィー解析

離散化手法(有限要素法・簡易化要素法)と微分位相同型写像としてのモード変換法を用いたカタストロフィー解析の概略を以下に示す。



(I) 離散化された系のポテンシャル V

$$V: \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^K \rightarrow \mathbb{R}, \quad V: (\omega, p) \mapsto V(\omega, p)$$

$\mathbb{R}^N$ は状態空間(一般化座標 $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_N)$), $\mathbb{R}^K$ はコントロール空間(荷重・初期不整パラメータ)である。

系の平衡空間 M_V は、

$$M_V = \{(\omega, p) \mid \frac{\partial V}{\partial \omega_i}(\omega, p) = 0 \quad (i=1, \dots, N)\} \subset \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^K$$

そして、 M_V 上の特異点 $(\det \frac{\partial^2 V}{\partial \omega_i \partial \omega_j}) = 0, 1 \leq i, j \leq N$ の近傍のカタストロフィーは、カタストロフィー写像

$$\chi_V: M_V \rightarrow \mathbb{R}^K$$

による $\mathbb{R}^K$ 内の分岐集合によって示される。

(II) モード変換されたポテンシャル D

系の自由度 N, K を低減し、 $V_{ij} = \frac{\partial^2 V}{\partial \omega_i \partial \omega_j}$ を対角化する2つの線形変換(モード変換)。

$$\begin{cases} h_1: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^n, & h_1: \omega = (\omega_1, \dots, \omega_N) \mapsto v = (v_1, \dots, v_n) \\ h_2: \mathbb{R}^K \rightarrow \mathbb{R}^k, & h_2: p = (p_1, \dots, p_K) \mapsto c = (c_1, \dots, c_k) \end{cases}$$

ただし、 $1 \leq n \ll N, 1 \leq k \ll K$ とする。

によって新しくポテンシャル D が定義される。

$$D: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}, \quad D: (v, c) \mapsto D(v, c)$$

平衡空間を M_D とするとカタストロフィー写像は、

$$\chi_D: M_D \rightarrow \mathbb{R}^k$$

(III) 本質的変数から成るポテンシャル A

m 個 ($1 \leq m \leq n$) の不安定現象が同時に起こるとき、対角化された $D_{ij} = \frac{\partial^2 D}{\partial v_i \partial v_j}$ は m 重複の固有値問題、

$$D_{ij} = 0 \quad (i=1, \dots, m) \quad D_{\alpha\alpha} \neq 0 \quad (\alpha=m+1, \dots, n)$$

を与える。ここで、 c を固定するとき、変換、

$$\psi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \psi: v = (v_1, \dots, v_n) \mapsto z = (z_1, \dots, z_n)$$

により拡張されたモーゼの定理を用いて、 D は次の形に展開できる。

$$D(v_1, \dots, v_n) = A(z_1, \dots, z_m) + \sum_{\alpha=m+1}^n \pm z_\alpha^2$$

ここに、 $A(z_1, \dots, z_m)$ は変数 $z_1, \dots, z_m$ から成る次数3以上の多項式である。第2項はカタストロフィーに無関係で、変数 z_α ($\alpha=m+1, \dots, n$) を非本質的変数と呼ぶ。また、変数 z_i ($i=1, \dots, m$) を本質的変数とするとポテンシャル A は、

$$A: \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}, \quad A: (z, c) \mapsto A(z, c)$$

平衡空間を M_A とするとカタストロフィー写像は、

$$\chi_A: M_A \rightarrow \mathbb{R}^k$$

(IV) トムの安定開折 F

A は $1 \leq m \leq 2, 1 \leq k \leq 4$ のとき定義され、変換、

$$g_1: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad g_2: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$$

によって有名な7つの初等カタストロフィーの安定開折 F のいずれかに変換される。

以上の各ポテンシャル V, D, A, F の間の変換が微分位相同型写像であれば、 V, D, A, F はすべて同値である。

このとき、カタストロフィー写像 $\chi_V, \chi_D, \chi_A, \chi_F$ も同値で、これらによるコントロール空間内の分岐集合も同値である。

$$\begin{array}{ccccccc} M_V & \xrightarrow{h_1, h_2} & M_D & \xrightarrow{\psi, I} & M_A & \xrightarrow{g_1, g_2} & M_F \\ \chi_V \downarrow & & \chi_D \downarrow & & \chi_A \downarrow & & \chi_F \downarrow \\ \mathbb{R}^K & \xrightarrow{h_2} & \mathbb{R}^k & \xrightarrow{I} & \mathbb{R}^k & \xrightarrow{g_2} & \mathbb{R}^k \end{array}$$

結局、多自由度系のカタストロフィー特性は、不安定現象に本質的にかかわる変数のみで表わされた少自

由度系のカタストロフィー特性に置き換えてとらえることができる。

数値計算における実際の各ポテンシャルの形は、それぞれの特異点のまわりのTaylor展開の最初の数階の項(3階か4階まで)を取ることによって得られる。

たとえば、こうしたTaylor展開によるポテンシャル、 A と U の安定開折 F の間の変換 g_1, g_2 の具体的な形を考える。特に、不安定現象が単独に生ずる $m=1$ の場合(固有値問題 $A_{11} = \frac{\partial^2 A}{\partial x_1^2} = K_{11}^B - \lambda K_{11}^G = 0$, K_{11}^B, K_{11}^G は定数、 λ は荷重パラメータ)に注目する。不安定現象を示す本質的変数を x_1 , 対応する初期不整パラメータを ε_1 とする。また、 U の安定開折 F の状態変数を X , コントロール変数を (Λ, ε) とする。'折り目'と'くさび'のカタストロフィーについては、次のような g_1, g_2 が具体的に求められた。

'折り目'

$$F(X, \Lambda, \varepsilon) = \frac{\alpha}{3} X^3 + \frac{\Lambda}{2} X^2 + \varepsilon X, \quad \alpha = \frac{3}{2} A_{111} = \frac{3}{2} \left(\frac{\partial^3 A}{\partial x_1^3} \right)$$

$$(g_1, g_2); X = x_1 + \varepsilon_1, \Lambda = (\lambda_{cr} - \lambda) K_{11}^G, \varepsilon = -K_{11}^B \varepsilon_1 = -\lambda_{cr} K_{11}^G \varepsilon_1$$

'くさび'

$$F(X, \Lambda, \varepsilon) = \frac{\alpha}{4} X^4 + \frac{\Lambda}{2} X^2 + \varepsilon X, \quad \alpha = \frac{1}{6} A_{1111} = \frac{1}{6} \left(\frac{\partial^4 A}{\partial x_1^4} \right)$$

$$(g_1, g_2); X = x_1 + \varepsilon_1, \Lambda = (\lambda_{cr} - \lambda) K_{11}^G, \varepsilon = -K_{11}^B \varepsilon_1 = -\lambda_{cr} K_{11}^G \varepsilon_1$$

こゝに、 λ_{cr} は最低次の不安定現象を示す荷重パラメータで、上記の固有値問題 $A_{11} = 0$ の解である。

3. 数値解析例

詳しくは当日O.H.P.で発表する。

Table 1は、'非対称補剛板'をもつ平板の数値計算結果である。Case 1は、全体座屈が局所座屈に先行し $A_{111} \neq 0$ だから、非対称座屈で'折り目'のカタストロフィーである。逆に、Case 7は局所座屈が全体座屈に先行し $A_{111} = 0$ 、 $A_{1111} > 0$ だから、安定対称座屈で'くさび'のカタストロフィーである。そして、Case 3~6で全体座屈と局所座屈が起こり、単一傾斜 α 座屈点と'双曲的へど'のカタストロフィーを示す。

また、Fig. 1は'正方形無補剛板'の係数 $A_{1111} = K_{1111}^{BB} - K_{1111}^{BPB}$ (ただし $i=1$)とその分割要素数との関係を示したものである。数値計算結果は要素数に無関係であり、ある一定値に収束しており、十分信頼できるものである。

Table 1 Stability of Simply Supported Square Plates with an Eccentric Stiffener. Subjected to Uniformly Distributed Axial Compression. ($\nu = 1/3$)

Items	Case 1	Case 2	Case 3	Case 4	Case 5	Case 6	Case 7
λ_{cr}	5.0	10.0	14.75	14.8	14.9	15.0	20.0
A_{11} (1st Mode)	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1
A_{11} (2nd Mode)	11.671	14.295	14.295	14.295	14.295	14.295	14.295
A_{11} (3rd Mode)	100.37	218.46	745.81	519.94	946.34	1009.8	1079.1
A_{11} (4th Mode)	58.13	197.30	389.59	259.65	468.29	521.13	556.43
A_{11} (5th Mode)	12.44	20.94	356.22	240.30	458.09	488.62	521.63
A_{11} (6th Mode)	306.98	1114.6	818.81	507.87	860.34	919.33	1052.5
A_{11} (7th Mode)	219.19	607.08	421.85	254.47	450.25	481.09	548.28
A_{11} (8th Mode)	87.78	507.52	396.96	253.40	410.30	438.24	504.22
A_{11} (9th Mode)	0.1232	-0.083	-0.012	-0.003	-0.033	-0.217	-0.126
A_{11} (10th Mode)	-0.022	-0.2328	-0.0038	-0.0012	-0.187	-0.342	-0.662
A_{11} (11th Mode)	-0.0161	0.0100	0.942	0.0047	0.0128	0.0127	0.0016
A_{11} (12th Mode)	0.0687	0.0061	0.405	0.0016	0.0040	0.0039	0.0032
A_{11} (13th Mode)	-----	-----	-1.353	-0.478	-0.227	-0.216	-----
A_{11} (14th Mode)	-----	-----	-0.236	-0.959	-1.286	-1.340	-----
A_{11} (15th Mode)	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----
Type of Buckling	Asym.	Asym.	Non-clinal	Non-clinal	Non-clinal	Stable	Stable
Caractrophes	Fold	Fold	Hyperb. Umbilic	Hyperb. Umbilic	Hyperb. Umbilic	Cusp	Cusp

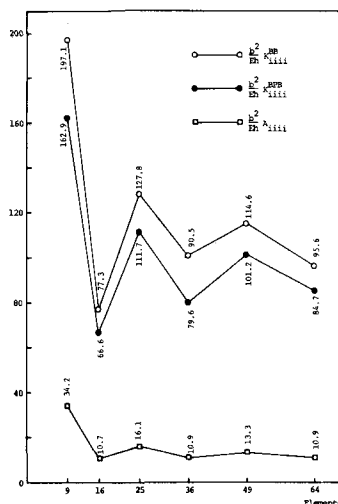


Fig. 1 Convergence of K_{1111}^{BB} , K_{1111}^{BPB} and A_{1111} for Simply Supported Square Plates. Subjected to Uniformly Distributed Axial Compression. ($\nu = 1/3$)

4. 参考文献

- 1) 丹羽・渡辺・勇, 土木構造物のカタストロフィーに関する2,3の考察, 第34回土木学会年次学術講演会講演要録集, I-31, 1979.
- 2) 丹羽・渡辺・勇, 構造物の耐荷力とカタストロフィーに関する数値計算, 第29回応用力学連合講演論文抄録集, A97, 1979.
- 3) 丹羽・渡辺・勇, 構造物のカタストロフィーに関する数値計算, 昭和55年度土木学会関西支部年次学術講演会講演要録集, I-29, 1980.
- 4) 野口, カタストロフィー, サイエンス社, 1977.