I-38　多段法による非線形動的応答解析の安定性と誤差に関する考察

電力中央研究所　正員　中村秀治
電力中央研究所　正員　塩尻弘雄

1. まえがき

構造系の固有振動数が広範囲に分布した硬い運動方程式の直接積分による数値解法は数多く提案されている。大まかに見て、運動方程式を一階の正規形に変換して解く方法に、係数マトリックスの指数関数近似に基づくもの、差分近似で目的にふさわしい特性を有する方法を取り出すものなどがある。前者は指数関数のPadé近似を用いるのが代表的であり、後者はGearにより提案された硬安定法と呼ばれる一連の方法が著名である。二階の運動方程式のまま解く方法は、Newmarkのβ法を初めとして主として構造解析分野で開発されてきている。この他にも、時間領域を有限要素化する方法など変化に富んだ各種の方法が提案されている。この現状を見る限り、既に実用上十分な知識を得ていると言えるが、実際に有限の時間きざみhで直接積分していく時、種々の問題に直面する。運動方程式が非線形性を有している場合がその一つであり、一ステップあたりの計算量を減少させ、かつ精度、安定性を維持しつつ時間きざみを大きく取り得るスキームの開発が試みられている。

非線形応答解析と言った場合、通常、多段法が適用されると考えられる。これに属する多くのスキームの中で、Gearにより提案された硬安定法[3]と呼ばれる6次までの一連のスキームは著名であるが、3次以上は無条件安定にならない。そこで、K.C.Park[1]はGearの2次，3次公式の中間に属する無条件安定なスキームを提案した。Parkの硬安定法は打ち切り誤差が$\frac{1}{10}h^3$にとどまるにもかかわらず、精度および安定性の点から高い評価を得ている[2]。

単に多段法と言えば線形多段法を意味し、Dahlquistの指摘通り[4]、無条件安定でかつ最良の精度を有するのは台形則である。台形則は打ち切り誤差$\frac{1}{12}h^3$で、指数関数近似で言えばPadéの一次の有理式近似と同等の精度を有する。従って、無条件安定な多段法では、所詮、台形則以上の精度向上は望めないが、問題は歪硬化、歪軟化、大変形などの非線形性に対する局所的不安定現象である。Parkは局所的不安定現象について検討を行なっているが、Parkの硬安定法においても局所的不安定現象は解決されていない。

ここでは、無条件安定を確保し得るスキームの打ち切り誤差がh^3のオーダーより高次になり得ないことから、打ち切り誤差がh^3のオーダーを有し、Gear(2次，3次)，Parkの硬安定法，台形則などを包含する多段表示式を提示し、安定性と誤差の検討を行なうことにした。打ち切り誤差がh^3のオーダーの各スキームが個別に存在するのではなく、中間にも種々の特性を有する無数のスキームが存在することを示すと同時に、局所的不安定現象の数値計算例を示し、局所的安定性評価方法および多段表示式中のパラメーター選択など未解決問題の多いことを指摘する。

2. 打ち切り誤差がh^3オーダーの多段表示式とその安定性および誤差

線形多段式を

$$\alpha_0 y_{n+1}+\alpha_1 y_n+\alpha_2 y_{n-1}+\alpha_3 y_{n-2}=h\beta_0\dot{y}_{n+1}+h\beta_1\dot{y}_n \quad \text{------} (1)$$

で表わす。ここで、$\alpha_i(i=0\sim3)$，$\beta_i(i=0,1)$は各々のスキームによって定まる定数であり、hは時間きざみである。式(1)を用いれば、打ち切り誤差はh^5のオーダーまで上げられ、

$$\frac{17}{6}y_{n+1}-\frac{9}{6}y_n-\frac{9}{6}y_{n-1}+\frac{1}{6}y_{n-2}=h\dot{y}_{n+1}+3h\dot{y}_n \quad \text{------} (2)$$

となるが、構造物の動的応答解析を行なう場合には安定性が極端に悪くなる。そこで、打ち切り誤差をh^3オーダーまで下げれば、α_i，β_iについて2つの自由度が生じ、$\alpha_3=\alpha$，$\beta_1=\beta$と置けば次式が得られる。

$$\left(-\alpha+\frac{\beta}{2}+\frac{3}{2}\right)y_{n+1}+(3\alpha-2)y_n+\left(-3\alpha-\frac{\beta}{2}+\frac{1}{2}\right)y_{n-1}+\alpha y_{n-2}=h\dot{y}_{n+1}+\beta h\dot{y}_n \quad \text{------} (3)$$

α，βは任意に選び得るが、

$\alpha=0,\ \beta=1 \Rightarrow$ 台形則　　$\alpha=0,\ \beta=0 \Rightarrow$ Gear 2次　　$\alpha=-\frac{1}{6},\ \beta=0 \Rightarrow$ Park

$\alpha=-\frac{1}{3},\ \beta=0 \Rightarrow$ Gear 3次$(O(h^4))$　　$\alpha=-\frac{1}{6},\ \beta=1 \Rightarrow O(h^4)$　　$\alpha=-\frac{1}{4},\ \beta=\frac{1}{2} \Rightarrow O(h^4)$

となる。

式(3)の打ち切り誤差は

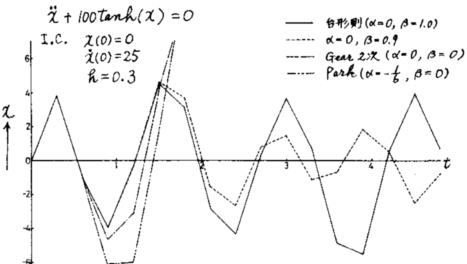
$$E(O(h^3))=\frac{-\alpha+\frac{1}{6}\beta-\frac{1}{3}}{-\alpha+\frac{1}{2}\beta+\frac{3}{2}}h^3$$

$$E(O(h^4))=\frac{\frac{1}{2}\alpha-\frac{1}{12}}{-\alpha+\frac{1}{2}\beta+\frac{3}{2}}h^4$$

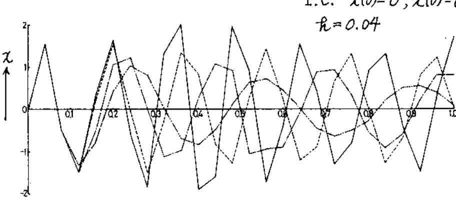
$$E(O(h^5))=\frac{-\frac{1}{4}\alpha+\frac{1}{120}\beta-\frac{1}{30}}{-\alpha+\frac{1}{2}\beta+\frac{3}{2}}h^5$$

である。α, βと安定性および打ち切り誤差の関係は右表に示す通りである。表中，○，×印はそれぞれ無条件安定か否かを表わしており，数値は打ち切り誤差を表わしている。h^3以外のオーダーの場合のみh^4が記入されている。これにより，台形則，GearおよびParkの硬安定法の位置づけ，および中間に存在する無数のスキームの特性が明確になる。

β \ α	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{8}$	$-\frac{1}{12}$	$-\frac{1}{18}$	$-\frac{1}{72}$	0
0.00	$-0.1364h^4$ × Gear 3	-0.0476 ×	-0.1000 ○ Park	-0.1282 ○	-0.1579 ○	-0.1786 ○	-0.2110 ○	-0.2222 ○ Gear 2
0.20	0.0172 ×	-0.0270 ×	-0.0755 ×	-0.1014 ○	-0.1287 ○	-0.1477 ○	-0.1773 ○	-0.1875 ○
0.40	0.0328 ×	-0.0085 ×	-0.0536 ×	-0.0776 ×	-0.1028 ○	-0.1203 ○	-0.1475 ○	-0.1569 ○
0.60	0.0469 ×	0.0081 ×	-0.0339 ×	-0.0563 ×	-0.0796 ×	-0.0958 ○	-0.1210 ○	-0.1296 ○
0.80	0.0597 ×	0.0233 ×	-0.0161 ×	-0.0370 ×	-0.0588 ×	-0.0739 ×	-0.0972 ○	-0.1053 ○
0.90	0.0657 ×	0.0303 ×	-0.0079 ×	-0.0281 ×	-0.0492 ×	-0.0637 ×	-0.0863 ×	-0.0940 ○
0.92	0.0669 ×	0.0317 ×	-0.0063 ×	-0.0264 ×	-0.0473 ×	-0.0617 ×	-0.0842 ×	-0.0918 ○
0.94	0.0680 ×	0.0330 ×	-0.0047 ×	-0.0247 ×	-0.0455 ×	-0.0598 ×	-0.0820 ×	-0.0897 ○
0.96	0.0692 ×	0.0344 ×	-0.0031 ×	-0.0230 ×	-0.0436 ×	-0.0579 ×	-0.0800 ×	-0.0875 ○
0.98	0.0703 ×	0.0357 ×	-0.0015 ×	-0.0213 ×	-0.0418 ×	-0.0559 ×	-0.0779 ×	-0.0854 ○
1.00	0.0714 ×	0.0370 ×	$-0.0769h^4$ ×	-0.0196 ×	-0.0400 ×	-0.0541 ×	-0.0759 ×	-0.0833 ○ 台形則



(a) 局所的不安定現象の顕著に見られる場合



(b) 局所的不安定現象が顕著でない場合

図-1 局所的不安定現象の数値計算例

3. 局所的不安定現象

非線形応答解析に対して，2.で述べた通常の安定性評価のみでは不十分である。歪軟化，歪硬化，大変形する構造系では，線形で無条件安定なスキームが必ずしも安定にならないことが指摘されている。図-1は非線形バネを有する2つの運動方程式に対して，4つの異なるスキーム(いずれも線形では無条件安定)を用いて応答解析した結果である。(a)の場合のように，極端な非線形性を有する方程式では，発散する様子が認められる。たまたま，ParkとGear 2次で発散し，台形則，α=0, β=0.9では発散していないが，hのわずかな変更で，すべて発散することも起こり得る。(b)は非線形性が強くない場合であるが，台形則に若干の発散傾向が認められる。

これらの現象に対して，Parkは簡単な考察を行なっており[1]，台形則，Houboltスキームに対しそれぞれ局所的不安定性有り，無しの判定を下しているが，この検討は未だ不完全である。同様の考察によって，当然，局所的安定性の確保されるべきスキーム，例えばParkの硬安定法が図-1の通り，明らかに不安定だからである。誤差評価方法の見なおし，および多自由度系の場合にはたして一自由度系で得た結果がそのまま通用するかどうか，これらもなお今後の検討課題である。

参考文献

1) Park, K. C.: An Improved Stiffly-Stable Method for Direct Integration of Nonlinear Structural Dynamic Equations, Transactions of the ASME, pp.464~470, June, 1975
2) Adeli, H., Gere, J. M. and Weaver, Jr. W.: Algorithms for Nonlinear Structural Dynamics, Proc. of ASCE, Vol.104, No.ST2, Feb., 1978
3) Gear, C.W.: Numerical Initial Value Problems in Ordinary Differential Equations, Prentice-Hall, pp.209~230, 1971
4) Dahlquist, G.: A Special Stability Problem for Linear Multistep Methods, BIT 3, pp.27~43, 1963