I -37　　ひずみ軟化構造の非線形解析に対する最小エネルギー探査法

大阪市立大学　工学部　　園田恵一郎

序論：

一般に，ひずみ軟化材料においては，ひずみエネルギー関数は凸関数ではない。それゆえ，この種の構造物の全ポテンシャルエネルギー関数はいくつもの局所最小点を持つことが予想される。すなわち，構造物は荷重径路または変位径路に従って全ポテンシャルエネルギーの局所最小点をたどって挙動するものと考えられる。このような局所最小点を見つけるためには，境界面上の荷重増分または強制変位増分に対する構造物内の全ポテンシャルエネルギー増分を最小にする変位増分解を決定すればよい。有限要素変位法を用いた場合には，これは節点変位増分に関する全ポテンシャルエネルギー増分関数の最小化問題として取扱える。もし，ひずみ軟化領域における除荷過程の影響を無視すれば，すなわち，負荷径路も除荷径路と同じと仮定すれば，この問題は無制約条件を持つ関数の最小化問題として，非線形計画法の手法によって解くことができ，また，除荷径路の分岐を考慮すれば，制約条件を持つ関数の最小化問題として同様の手法で解くことができる。

1．基本原理：

全ポテンシャルエネルギー最小原理は，物体力のない場合には，あらゆるひずみ適合場に対して，

$$\pi = \int_V W(\varepsilon_{ij})\,dV - \int_{S_T} T_j u_j\, dS \qquad (1)$$

を最小にする変位（u）とひずみ（ε_{ij}）が真の解となることを述べている。ここに，$W(\varepsilon_{ij})$はひずみエネルギー，T_jは表面S_Tに作用する力，u_jはそれに対応する変位を表わす。いま，ある状態（T_j, u_j）より（$T_j + dT_j$, $u_j + du_j$）に移行した時には，式（1）より，

$$\pi + d\pi = \int_V W(\varepsilon_{ij} + d\varepsilon_{ij})\,dV - \int_{S_T} (T_j + dT_j)(u_j + du_j)\,dS \qquad (2)$$

を最小にする変位増分（du）とひずみ増分（$d\varepsilon_{ij}$）が真の解となる。式（1）と式（2）より，

$$d\pi = \int_V \left[\frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}} d\varepsilon_{ij} + f(d\varepsilon_{ij}) \right] dV - \int_{S_T} \left[T_j\, du_j + dT_j (u_j + du_j) \right] dS \qquad (3)$$

ここに，$f(d\varepsilon_{ij})$は$d\varepsilon_{ij}$の２次以上の高次の関数である。$\partial W/\partial \varepsilon_{ij} = \sigma_{ij}$なる関係と仮想仕事の原理より，さらに式(3)は，$d\pi = \int_V f(d\varepsilon_{ij})\,dV - \int_{S_T} dT_j (u_j + du_j)\,dS$　　(4)

ひずみ軟化構造では荷重と変位の関係において局所的不安定になり得るので，荷重増分を制御するより，それに対応する変位増分を制御する方が解析に都合がよい。ここでは，比例負荷（$dT_j = dS\ T_j^\circ$，T_j°は基準荷重，dSは荷重増分倍数）の場合を考える。変位制御パラメータとして，

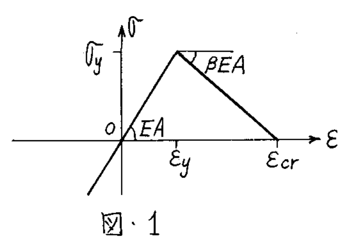
$$L + dL = \int_{S_T} T_j^\circ (\bar{u}_j + d\bar{u}_j)\,dS \qquad (5)$$

を導入し，強制変位増分（dL）に対するdSを逆に求める問題を考える。すると式(4)の$d\pi$の最小化問題は，

$$\left.\begin{aligned} &\text{minimize} \int_V f(d\varepsilon_{ij})\,dV \\ &\text{subject to} \int_{S_T} T_j^\circ\, d\bar{u}_j\, dS = dL \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

式(6)の解（du^*, $d\varepsilon_{ij}^*$）と式(4)の停留条件（$\delta d\pi = 0$）より，

$$dS = \frac{1}{dL} \int_V \frac{\partial f}{\partial (d\varepsilon_{ij}^*)}\, d\varepsilon_{ij}^*\, dV \qquad (7)$$



図・1

2．トラスの解析

図・1に示すような引張領域のみにおいて，軸ひずみε_yで軟化が起こり，ε_{cr}で全応力を解放する材料を考える。βは線形軟化係数で，$\beta = 0$は完全塑性体を，$\beta = \infty$は完全脆性体を表す。すると，

$f(d\varepsilon) = (EA/2)\,d\varepsilon^2$, for $-\infty < \varepsilon \le \varepsilon_y$;　$= -(\beta EA/2)\,d\varepsilon^2$, for $\varepsilon_y < \varepsilon < \varepsilon_{cr}$;　$= 0$

, for $\varepsilon > \varepsilon_{cr}$. トラスの節点の変位増分を $d\mathbf{u}$ とし，軟化領域に入った部材のひずみ増分を $d\varepsilon_s$ ，他の弾性領域のひずみ増分を $d\varepsilon_e$ とすれば，$[d\varepsilon_e \; d\varepsilon_s]^t = [\mathbf{b}_e \; \mathbf{b}_s]\, d\mathbf{u}$ なる関係より，式(6)の問題は

$$\left.\begin{array}{l} minimize \quad [\sum f(d\varepsilon) = \frac{1}{2} d\mathbf{u}^t \mathbf{b}_e^t \mathbb{E} \mathbf{b}_e d\mathbf{u} - \frac{1}{2} d\varepsilon_s^t \widetilde{\mathbb{E}} d\varepsilon_s] \\ subject\ to \quad \mathbf{b}_s d\mathbf{u} - d\varepsilon_s = 0 , \quad \mathbb{T}^t d\bar{\mathbf{u}} - dL = 0 \end{array}\right\} \qquad (8)$$

ここに，$\mathbb{E}$ は弾性係数マトリックス，$\widetilde{\mathbb{E}}$ は $\beta EA\ell$，ℓ は部材長，からなる対角行列。式(8)に対するラグランジュ関数は，　$\bar{F} = \sum f(d\varepsilon) + \boldsymbol{\lambda}^t(\mathbf{b}_s d\mathbf{u} - d\varepsilon_s) + \mu_0(\mathbb{T}^t d\bar{\mathbf{u}} - dL)$ —— (9)　ここに，$\boldsymbol{\lambda}$, μ_0 は未定定数である。いま，$d\varepsilon_s$ を固定し，$d\mathbf{u}$ に関して $\bar{F}$ の最小解を求めれば，$\sum f(d\varepsilon)$ は $d\mathbf{u}$ の正値2次関数であるから，$\partial\bar{F}/\partial(d\mathbf{u}) = 0$, $\partial\bar{F}/\partial\boldsymbol{\lambda} = 0$, $\partial\bar{F}/\partial\mu_0 = 0$ より，

$$\left.\begin{array}{l} \mathbf{b}_e^t \mathbb{E} \mathbf{b}_e d\mathbf{u} + \mathbf{b}_s^t \boldsymbol{\lambda} + \mu_0 \bar{\mathbb{T}} = 0 \\ \mathbf{b}_s d\mathbf{u} - d\varepsilon_s = 0 , \quad \bar{\mathbb{T}}^t d\mathbf{u} - dL = 0 \end{array}\right\} \text{—— (10)} \quad , ここに, \; \bar{\mathbb{T}}^t d\mathbf{u} = \mathbb{T}^t d\bar{\mathbf{u}} \; .$$

上式より，$d\mathbf{u}$, $\boldsymbol{\lambda}$, μ_0 を $d\varepsilon_s$ の関数として求め，式(9)に代入すれば，式(8)の問題は次のようになる。

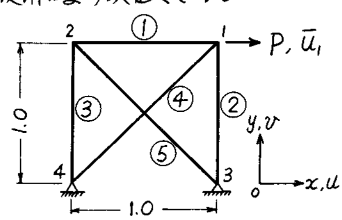
$$\begin{aligned} minimize\Big\{ \widetilde{F}(d\varepsilon_s) = C_0 + \frac{dL}{R}\Big[& 2\mathbb{J}^t\mathbb{C}\mathbb{K} + \mathbb{F}^t(\mathbf{b}_s\mathbb{K} - \mathbb{I}) - \mathbb{J}^t\mathbf{b}_s^t\mathbb{G} - (1+\frac{Z}{R})\bar{\mathbb{T}}^t\mathbb{K} \\ & + \frac{1}{R}(\mathbb{J}^t\bar{\mathbb{T}} - R\mathbb{I})\widetilde{\mathbb{G}}\Big] d\varepsilon_s + d\varepsilon_s\Big[\frac{1}{2}\mathbb{K}^t\mathbb{C}\mathbb{K} - \mathbb{G}^t(\mathbf{b}_s\mathbb{K} - \mathbb{I}) + \frac{1}{R}\widetilde{\mathbb{G}}^t\bar{\mathbb{T}}^t\mathbb{K} - \frac{1}{2}\widetilde{\mathbb{E}}\Big] d\varepsilon_s \Big\} \end{aligned} \text{—— (11)}$$

ここに，C_0 は定数項，$\mathbb{I}$ は単位行列，$\mathbb{C} = \mathbf{b}_e^t \mathbb{E} \mathbf{b}_e$, $\mathbb{D} = \mathbf{b}_s \mathbb{C}^{-1} \mathbf{b}_s^t$, $R = \bar{\mathbb{T}}^t \mathbb{C}^{-1} \bar{\mathbb{T}}$, $\mathbb{K} = \mathbb{C}^{-1}\mathbf{b}_s^t\mathbb{G} - \frac{1}{R}\bar{\mathbb{T}}\bar{\mathbb{T}}^t\mathbb{C}^{-1}\mathbf{b}_s^t\mathbb{G}$, $\mathbb{J} = (1 - Z/R)\mathbb{C}^{-1}\bar{\mathbb{T}} - \mathbb{C}^t\mathbf{b}_s^t\mathbb{F}$, $\widetilde{\mathbb{G}} = \bar{\mathbb{T}}^t\mathbb{C}^{-1}\mathbf{b}_s^t\mathbb{G}$, $\mathbb{G} = \mathbb{H}^{-1}\mathbb{D}^{-1}$, $\mathbb{F} = \mathbb{H}^{-1}\mathbb{D}^{-1}\mathbf{b}_s\mathbb{C}^{-1}\bar{\mathbb{T}}$, $\mathbb{H} = \mathbb{I} - \frac{1}{R}\mathbb{D}^{-1}\mathbf{b}_s \cdot \mathbb{C}^{-1}\bar{\mathbb{T}}\bar{\mathbb{T}}^t\mathbb{C}^{-1}\mathbf{b}_s^t$, $Z = \bar{\mathbb{T}}^t\mathbb{C}^{-1}\mathbf{b}_s^t\mathbb{H}^{-1}\mathbb{D}^{-1}\mathbf{b}_s\mathbb{C}^{-1}\bar{\mathbb{T}}$ 。式(11)の $\widetilde{F}(d\varepsilon_s)$ は正値2次関数かどうか分からない。もし，正値2次関数なら，$\partial\widetilde{F}/\partial(d\varepsilon_s) = 0$ より，$d\varepsilon_s$ は連立一次方程式の解として決定されるが，正値2次関数でないならば，最急傾斜降下法（The Method of Steepest Descent）によって数値的に解を求めなければならない。すなわち，変数 $\boldsymbol{\chi} = d\varepsilon_s$ とおいて，初期値 $\boldsymbol{\chi}_0 = 0$ を選ぶ。すると改良値 $\boldsymbol{\chi}_\ell$（$\ell = 1, 2, 3, \cdots\cdots$）はつぎのアルゴリズムにより求められる。

$$\boldsymbol{\chi}_\ell = \boldsymbol{\chi}_{\ell-1} + \nu_\ell \nabla\widetilde{F}(\boldsymbol{\chi}_{\ell-1}) / \| \nabla\widetilde{F}(\boldsymbol{\chi}_{\ell-1}) \| \qquad (12)$$

ここに，$\nabla\widetilde{F}(\boldsymbol{\chi}_{\ell-1}) = \partial\widetilde{F}/\partial\boldsymbol{\chi}_{\ell-1}$, ν_ℓ は十分に小さな有限な値，式(12)によって，$\widetilde{F}(\boldsymbol{\chi}_{n-2}) > \widetilde{F}(\boldsymbol{\chi}_{n-1}) > \widetilde{F}(\boldsymbol{\chi}_n)$ になる3点（$\boldsymbol{\chi}_{n-2}, \boldsymbol{\chi}_{n-1}, \boldsymbol{\chi}_n$）で囲みを作り，最小解は2次補間法の反復使用により決定できる。

3. 計算例における考察：



図・2

図2の1次不静定トラスを例にとる。$EA = 1.0$, $\sigma_y A = 1.0$, $\varepsilon_y = 1.0$ とおく。弾性解より，$P_0 = 1.2678$, $\bar{u}_1 = 2.7071$ で部材④が最初に軟化領域に入ることが分かる。したがって，$\bar{u}_1 = 2.7071 + d\bar{u}_1$,（$d\bar{u}_1 > 0$）の下での解を調べる。

$$\sum f(d\varepsilon) = \frac{1}{2}\big[d\varepsilon_1^2 + d\varepsilon_2^2 + d\varepsilon_3^2 + \sqrt{2}(d\varepsilon_4^2 + d\varepsilon_5^2) - \sqrt{2}(1+\beta)\, d\varepsilon_4^2\big]$$

$$\bar{F} = \sum f(d\varepsilon) - \frac{1}{\sqrt{2}}(1+\beta)d\varepsilon_4 + \lambda(0.5\, d\bar{u}_1 + 0.5\, dv_1 - d\varepsilon_4)$$

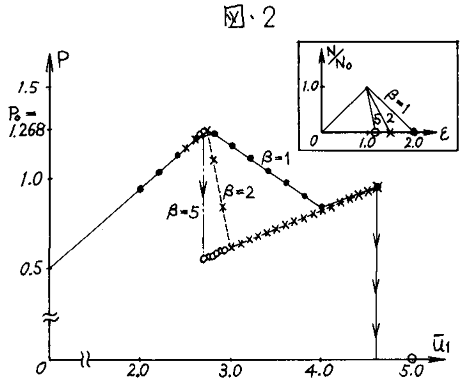
$\partial\bar{F}/\partial u_2 = 0$, $\partial\bar{F}/\partial v_1 = 0$, $\partial\bar{F}/\partial v_2 = 0$, $\partial\bar{F}/\partial\lambda = 0$ より

$$\begin{Bmatrix} du_1 \\ dv_1 \\ du_2 \\ dv_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.0 & 0 \\ -1.0 & 2.0 \\ \frac{1+2\sqrt{2}}{2(1+\sqrt{2})} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2(2+\sqrt{2})} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d\bar{u}_1 \\ d\varepsilon_4 \end{Bmatrix} , \quad \lambda = 4d\bar{u}_1 - 2\sqrt{2}(1+2\sqrt{2})\, d\varepsilon_4$$

$$minimize\Big\{\widetilde{F}(d\varepsilon_4) = \frac{1}{8}\Big[1 + \frac{11+2\sqrt{2}}{4(2+\sqrt{2})} - \frac{11+8\sqrt{2}}{(1+\sqrt{2})^2}\Big] d\bar{u}_1^2 - 2d\bar{u}_1 d\varepsilon_4 + \frac{1}{2}(4-\sqrt{2}\beta)\, d\varepsilon_4^2$$

$\beta < 2\sqrt{2}$ なら，$\partial\widetilde{F}/\partial\varepsilon_4 = 0$ より，$d\varepsilon_4 = 2\, d\bar{u}_1 / (4 - \sqrt{2}\beta)$

$\beta > 2\sqrt{2}$ なら，$d\varepsilon_4 \to 1/\beta$ となり，変位（$\bar{u}_1 = 2.7071$）において飛移が起こる（図3参照）。



図・3