I-36　非線形熱方程式の数値解法について

センチュリリサーチセンタ(株)　正員　武田　洋

1.まえがき

工学における代表的な偏微分方程式の一つとして"熱方程式"がある。この方程式は熱伝導問題のみならず、浸透流問題などの拡散現象を表わすもので、広範囲の分野で用いられている。近年、数値解析理論及び方法の進歩や電子計算機の発達・普及によって、線形な熱方程式については日常的に解析されており、さらに非線形問題に対する研究も数多い。ここでは非線形熱方程式を数値的に解析するための一解法について提案することが目的であり、空間については有限要素法、時間については差分法を用いて離散する混合型の近似を基本とする。なおここで提案する方法を用いることにより代数方程式の係数行列の三角分解の回数を減少できる。

2.基礎方程式とその離散系

熱的平衡条件は次式で与えられる。

$$c\rho\dot{\theta} = -\frac{\partial q_i}{\partial x_i} + Q \qquad \text{または} \qquad \dot{\theta} = -\frac{1}{c\rho}\frac{\partial q_i}{\partial x_i} + \frac{Q}{c\rho} \tag{1}$$

上式において θ は温度、c は比熱、ρ は密度、x_i は i 方向座標成分、q_i は i 方向の熱流束、Q は内部発熱であり、$\dot{}$ は時間 t に関する微分を表わす。なおここでは総和規約を用いるものとする。また、熱流束と温度の関係は次に示す熱的構成方程式(Fourierの法則)で与えられる。

$$q_i = -k_{ij}\frac{\partial\theta}{\partial x_j} \qquad \text{または} \qquad \frac{q_i}{c\rho} = -\frac{k_{ij}}{c\rho}\frac{\partial\theta}{\partial x_j} = -\lambda_{ij}\frac{\partial\theta}{\partial x_j} \tag{2}$$

ここで k_{ij} は熱伝導係数、$\lambda_{ij} = k_{ij}/c\rho$ は温度拡散係数である。一般には式(2)を式(1)に代入し、熱方程式を導びきこれを離散の出発とする場合が多いが、ここでは便宜上、式(1),(2)を直接に用いて離散することとする。まず式(1)を変分形式で表わすと次のようになる。

$$\int\delta\theta\,\dot{\theta}\,dV = -\int\delta\theta\frac{1}{c\rho}\frac{\partial q_i}{\partial x_i}dV + \int\delta\theta\frac{Q}{c\rho}dV \tag{3}$$

ここで $\delta\theta$ は温度境界を満足する以外は任意の温度 θ の変分を表わすもので、式(3)の右辺第1項を部分積分し、境界条件を考慮することにより次式が得られる。

$$\int\delta\theta\,\dot{\theta}\,dV = \int\frac{\partial\delta\theta}{\partial x_i}\frac{q_i}{c\rho}dV + \int\delta\theta\frac{Q}{c\rho}dV \tag{4}$$

次に式(4)を空間に対して離散するために次の有限要素近似を導入する。

$$\theta = N_m\theta_m \quad , \quad \dot{\theta} = N_m\dot{\theta}_m \quad , \quad \frac{\partial\theta}{\partial x_i} = B_{im}\theta_m \tag{5}$$

ここで θ_m は節点 m における温度を表わし、N_m は補間関数、B_{im} は N_m を x_i で微分したものである。式(5)を式(4)に代入すると次式が得られる。

$$G_{mn}\dot{\theta}_n = \int B_{im}\frac{q_i}{c\rho}dV + P_m \tag{6}$$

上式において G_{mn} はGramマトリックスと呼ばれるもので、P_m は等価熱流ベクトルであり次のとおりである。

$$G_{mn} = \int N_m N_n\,dV \quad , \quad P_m = \int N_m\frac{Q}{c\rho}dV \tag{7}$$

次に式(6)の右辺第1項について考察するために、非線形性の要因である λ_{ij} を次のようにおく。

$$\lambda_{ij} = \lambda^\circ_{ij} + \Delta\lambda_{ij} \tag{8}$$

ここでλ°_{ij}はある基準の値（一定）であり，$\Delta\lambda_{ij}$は基準値からの変化である。式(8)を式(2)に代入し，式(5)を考慮に入れると，式(6)は次のようになる。

$$G_{mn}\dot{\Theta}_n = -\Lambda_{mn}\Theta_n + R_m + P_m \quad \text{または} \quad \mathbf{G}\dot{\boldsymbol{\Theta}} = -\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{\Theta} + \mathbf{R} + \mathbf{P} \tag{9}$$

ここにΛ_{mn}は温度拡散マトリックス，R_mは非線形項であり次式で与えられる。

$$\Lambda_{mn} = \int B_{im}\lambda^\circ_{ij}B_{jn}\,dV \;;\quad R_m = -\int B_{im}\Delta\lambda_{ij}B_{jn}\,dV\,\Theta_n \tag{10}$$

式(9)を時刻$(t+\beta\Delta t)$においてたてると次のようになる（ただし$0\leq\beta\leq 1$）。

$$\mathbf{G}\dot{\boldsymbol{\Theta}}_\beta = -\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{\Theta}_\beta + \mathbf{R}_\beta + \mathbf{P}_\beta \tag{11}$$

上式における添字βは時刻$(t+\beta\Delta t)$における値を意味し，ここで次の近似を導入する。(1)(4)

$$\dot{\boldsymbol{\Theta}}_\beta = \frac{1}{\Delta t}(\boldsymbol{\Theta}_{i+1} - \boldsymbol{\Theta}_i) = \frac{1}{\Delta t}\Delta\boldsymbol{\Theta} \;;\quad \boldsymbol{\Theta}_\beta = (1-\beta)\boldsymbol{\Theta}_i + \beta\boldsymbol{\Theta}_{i+1} = \boldsymbol{\Theta}_i + \beta\Delta\boldsymbol{\Theta} \tag{12}$$

ここで添字iは時刻tを，$(i+1)$は時刻$t+\Delta t$を意味する。式(11),(12)より次式が得られる。

$$\left(\frac{1}{\Delta t}\mathbf{G} + \beta\boldsymbol{\Lambda}\right)\Delta\boldsymbol{\Theta} = \mathbf{R}_\beta + \mathbf{P}_\beta - \boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{\Theta}_i \tag{13}$$

上式の左辺係数マトリックスは，時間増分Δtが変化しなければ一定であり，また右辺係数ベクトルはすべて要素毎に計算し，それを組み立てることにより評価できる。

3. 安定性と収束性

ここで提案する方法の安定性と収束性については次の簡単な場合について考察すればよい。(3)

$$\dot{\Theta} + \lambda\Theta = 0 \tag{14}$$

上式について，2節で説明した方法を適用すると次のようになる。

$$\left(\frac{1}{\Delta t} + \beta\lambda^\circ\right)\Delta\Theta = \beta\Delta\lambda\Delta\Theta - (\lambda^\circ + \Delta\lambda)\Theta_i \tag{15}$$

従って時間方向の積分の安定性と，非線形繰り返しの収束条件として次式を得る。

$$\Delta t \leq \frac{1}{(1-\beta)\lambda^\circ + \Delta\lambda} \;;\quad |\Delta\lambda| \leq \frac{1}{\beta\Delta t} + \lambda^\circ \tag{16}$$

4. あとがき

紙面の都合により計算結果について示すことができないが，現在までの経験では予測子－修正子形の方程式を作りかえるスキームとほぼ同一の収束・精度が得られている。なお詳細は当日発表する。

参考文献

(1) 武田"時間依存の問題の解析と有限要素モデルについて"鋼構造協会テキスト，1977

(2) 吉田"熱伝導問題のモデル化と時間積分"鋼構造協会テキスト，1977

(3) T.J.R. Hughes "Unconditionally Stable Algorithms for Nonlinear Heat Conduction" Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 10 (1977)

(4) K.J. Bathe and M.R. Khoshgoftaar "Finite Element Formulation and Solution of Nonlinear Heat Transfer" Nuclear Engineering and Design 51 (1979)