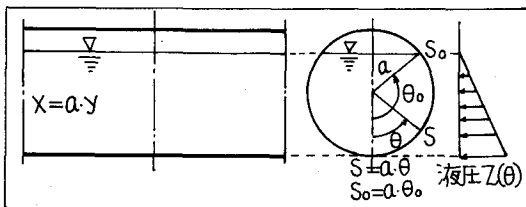


§1. 液圧 $Z(\theta)$ の表現: γ を液体の単位体積重量とすると $|S| \leq |S_0|$ のとき $Z(\theta) = \gamma \cdot a \cdot (\cos \theta - \cos \theta_0)$ $|S| > |S_0|$ のとき $= 0$. である。 $Z(\theta)$ を円周方向へFourier余弦展開して

$$Z(\theta) = A_0 + A_1 \cos \theta + A_2 \cos 2\theta + \dots + A_n \cos n\theta$$

とすると

$$A_0 = \frac{\gamma a}{\pi} (\sin \theta_0 - \theta_0 \cos \theta_0), A_1 = \frac{\gamma a}{\pi} (\theta_0 - \frac{1}{2} \sin 2\theta_0), \text{ のとき } A_n = \frac{\gamma a}{\pi} \left\{ \frac{\sin(n-1)\theta_0}{(n-1)\pi} - \frac{\sin(n+1)\theta_0}{n(n+1)\pi} \right\} \text{ である.}$$

§2. 薄肉円筒殻理論による解析解: 「変位 U, V, W に関して連成した連立偏微分方程式」は, Matrics表示すると

$$\begin{bmatrix} L_{11} & L_{21} & L_{31} \\ L_{12} & L_{22} & L_{32} \\ L_{13} & L_{23} & L_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U \\ V \\ W \end{Bmatrix} = \frac{a^2}{C} \begin{Bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{Bmatrix} \quad \text{W. Flüggeによると 線型微分演算子 } L_{ij} (i, j=1, 2, 3) \text{ は}$$

$$L_{11} = \frac{\partial^2}{\partial y^2} + (1+\nu) \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}, \quad L_{12} = L_{21} = \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial^2}{\partial y \partial \theta}$$

$$L_{13} = L_{31} = \mu \frac{\partial}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^3}{\partial y^3} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^3}{\partial y \partial \theta^2} \right), \quad L_{23} = L_{32} = \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{3-\mu}{2} \nu \frac{\partial^3}{\partial y^2 \partial \theta}$$

 $C = \frac{Eh}{1-\mu^2}, \quad \nu = \frac{1}{12} \left(\frac{h}{a} \right)^2, \quad \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}, \quad L_{22} = \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + (1+\nu) \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad L_{33} = 1 + \nu (\nabla^4 + 2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} + 1) \text{ である.}$

この方程式は, 簡単なMatrics演算(たすき掛け)の後に, 次のような「非連成の形」へと導くことができる。

$$\begin{aligned} (L_{11}L_{22}L_{33} + L_{12}L_{23}L_{31} + L_{13}L_{32}L_{21} - L_{11}L_{32}L_{23} - L_{12}L_{21}L_{33} - L_{13}L_{22}L_{31}) \cdot W \\ = (L_{21}L_{32} - L_{22}L_{31}) \Phi_X + (L_{12}L_{31} - L_{11}L_{32}) \Phi_Y + (L_{11}L_{22} - L_{12}L_{21}) \Phi_Z \end{aligned}$$

$$(L_{11}L_{22} - L_{12}L_{21}) \cdot U = (L_{12}L_{23} - L_{22}L_{13}) \cdot W + L_{22} \Phi_X - L_{12} \Phi_Y$$

$$(L_{11}L_{22} - L_{12}L_{21}) \cdot V = (L_{21}L_{13} - L_{11}L_{23}) \cdot W - L_{21} \Phi_X + L_{11} \Phi_Y$$

$$\begin{aligned} \text{ここに: } \Phi_X &= \frac{-a^2}{C} \cdot X \\ \Phi_Y &= \frac{-a^2}{C} \cdot Y \\ \Phi_Z &= \frac{a^2}{C} \cdot Z \end{aligned}$$

ここで, $U = \square(y) \cdot \cos n\theta, V = \nabla(y) \cdot \sin n\theta, W = W(y) \cdot \cos n\theta$ として変数分離すると,

次のような「非連成の連立常微分方程式」が得られる。(X=Y=0.)

$$\left[\frac{d^8}{dy^8} + W_1 \frac{d^6}{dy^6} + W_2 \frac{d^4}{dy^4} + W_3 \frac{d^2}{dy^2} + W_4 \right] \cdot W(y) = W_5$$

$$\left[\frac{d^4}{dy^4} + U_1 \frac{d^2}{dy^2} + U_2 \right] \cdot \square(y) = (U_3 \frac{d^5}{dy^5} + U_4 \frac{d^3}{dy^3} + U_5 \frac{d}{dy}) W(y)$$

$$\left[\frac{d^4}{dy^4} + V_1 \frac{d^2}{dy^2} + V_2 \right] \cdot \nabla(y) = (V_3 \frac{d^4}{dy^4} + V_4 \frac{d^2}{dy^2} + V_5) \cdot W(y)$$

ここに, $W_1 \sim W_5, U_1 \sim U_5, V_1 \sim V_5$ は, 定数係数である。 $n=1$ のとき, W. Flügge の方程式では $W_3=W_4=0$ となる。この第1式から $W(y)$ が求まると, 第2,3式から $\square(y), \nabla(y)$ が順次求まることになる。以上の手順によって得られる解は, Kirchhoff-Loveの仮定に基づく薄肉の真円閉鎖円筒殻の「厳密解」である。§3. 応用例題: いま, 半径 $a=75.565$ cm $\mu=0.3, E=2.1 \times 10^6$ kg/cm², $h=1.27$ cm長さ $l=1,600$ cm の容器が, 水 $\gamma=0.001$ kg/cm³が入って両端を固定 $U=V=W=\frac{\partial W}{\partial x}=0$,

A	C	B
$U=0$	$U=0$	
$V=0$	$\frac{\partial W}{\partial x}=0$	
$W=0$	$\theta_x=0$	
$\frac{\partial W}{\partial x}=0$	$N_x=0$	

$$A_0 = \frac{\gamma a}{\pi}, \quad A_1 = \frac{\gamma a}{2}$$

$$A_n = \left(\frac{2\gamma a}{\pi} \right) \frac{1}{n^2 - 1} (-1)^{n/2+1} \quad (n=2, 4, 6, \dots)$$

されている。このとき, $A_0 = 2.40531 \times 10^{-2}$ kg/cm², $A_1 = 3.77825 \times 10^{-2}$, $A_2 = 16.03539 \times 10^{-3}$, $A_4 = 3.2071 \times 10^{-3}$, $A_6 = 1.3745 \times 10^{-3}$, $A_8 = 7.6359 \times 10^{-4}$, $A_{10} = \dots$ となる。 A_6 までをとって計算する。 A_6 は A_0 の約 $\frac{1}{18}$ に収束する。対称性を利用して, 中央点では, $U = \frac{\partial W}{\partial x} = Q_x^* = N_x^* = 0$ とし, L.S.D. Morley の方程式を用いて計算する。本構造は, 初等梁理論では, 等分布荷重 $q_0 = \frac{1}{2} \gamma \pi a^2 = 8.969$ kg/cm を受ける両端固定梁に相当し,
 $M_A = M_B = \frac{1}{12} \cdot q_0 \cdot l^2 = 1.914 \times 10^6$ kg·cm, $M_C = \frac{1}{24} \cdot q_0 \cdot l^2 = 9.567 \times 10^5$ kg·cm, $Q_A = Q_B = \frac{q_0 l}{2} = 7.176 \times 10^3$ kg となり, $n=1$ のときの膜理論による軸方向軸力 $N_x = \bar{N}_x \cdot \cos \theta$, 面内せん断力 $N_{x\theta} = \bar{N}_{x\theta} \cdot \sin \theta$ は, $[\bar{N}_x]_A = [\bar{N}_x]_B = 106.7$ kg/cm, $[\bar{N}_{x\theta}]_A = [\bar{N}_{x\theta}]_B = 30.3$ kg/cm である。

以下に、計算結果を示す。収束が非常に良いことがわかる。

初等梁理論における

平面保持の仮定は保たれない。

$n=1$ における

軸方向面外の

及び面内の等

価換算せん断力

Q_x^* , N_{x0}^* は、

$[Q_x^*]_A = 3.8 \text{ kg/cm}$

$[N_{x0}^*]_A = 26.5 \text{ kg/cm}$

で、その和は、

膜理論値 N_{x0}

と等しい。

軸方向軸力 $N_x = \bar{N}_x \cos \theta$ と

曲げモーメント $M_x = \bar{M}_x \cos \theta$ は

$[\bar{N}_x]_A = 105.9 \text{ kg/cm}$ ($[\bar{M}_x]_A = 16.2 \text{ kgcm/cm}$)

となり、

$\pi a^2 \bar{N}_x + \pi a \bar{M}_x = 1.91 \times 10^6 \text{ kgcm}$

で、初等梁理論値と良く合う。

N_x は、軸方向に初等梁理論

における M 図と同じ形状で

あるが、既に上下縁の値は異なっている。

このような構造は、土木の分野では

閉水路におけるものであり、初等梁理論

で設計されることが多く、支持縁近傍の

局部的な応力度の増加を把握できない。

これは、高圧の送水管や P.C., R.C 水路

においては、注意すべきであろう。

ここで提案した解法は、Kirchhoff-Love

の仮定に基づく簿肉の真円閉鎖円筒殻の

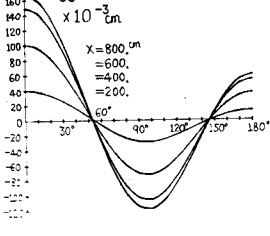
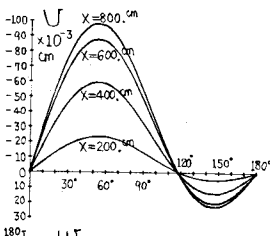
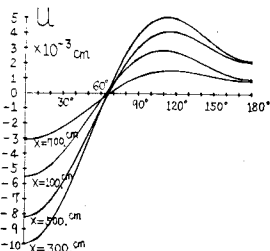
厳密解である。Vlasov, Goldenveizer らのような Stress Function, Novozhilov における Complex Force のような

ものを要せず、連立偏微分方程式の通常の解法 (変数分離の手法) によってあり、簡単で無理がない。

全体としての完全な解は、別の機会に譲りたい。参考文献 'Stresses in Shells' W. Flügge Springer, 1960

'Thin Elastic Shells' H. Kraus, Wiley, New York 1967 'Introduction to the Theory of Shells' C.L. DYM

'Thin Shell Theory' V.V. Novozhilov, Water-Noordhoff Publishing 'Theory of Elastic Thin Shells' A.L. Goldenveizer



$n=0$	$n=1$	$n=2$	$n=4$	$n=6$
0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
20.0	-0.7366	-0.5461	-0.0471	-0.0015
40.0	-1.4511	-1.0645	-0.0243	-0.0019
60.0	-2.1065	-1.5243	-0.0287	-0.0015
80.0	-2.7064	-1.9444	-0.0246	-0.0010
100.0	-3.2524	-2.3124	-0.0222	-0.0006
200.0	-5.2244	-3.5287	-0.0112	-0.0000
300.0	-6.0126	-3.9077	-0.0019	
400.0	-5.9824	-3.6874	-0.0007	
500.0	-5.1433	-3.0580	-0.0004	
600.0	-3.7413	-2.1650	-0.0001	
700.0	-1.9644	-1.1178	0.0000	0.0000
800.0	0.0	0.0	0.0	0.0

$n=0$	$n=1$	$n=2$	$n=4$	$n=6$
0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
20.0	-0.6618	-0.4051	-0.0253	-0.0044
40.0	-1.3214	-0.9978	-0.0607	-0.0089
60.0	-2.0548	-1.5236	-0.0933	-0.0121
80.0	-2.7217	-2.0535	-0.1373	-0.0141
100.0	-3.0345	-2.5495	-0.1724	-0.0151
200.0	-13.1712	-13.4471	-0.2198	-0.0153
300.0	-22.7871	-24.1400	-0.3026	-0.0155
400.0	-32.5155	-34.7866	-0.2936	
500.0	-41.2381	-44.1077	-0.2829	
600.0	-48.0881	-51.2653	-0.2848	
700.0	-52.4448	-55.7371	-0.2848	
800.0	-53.9433	-57.2471	-0.2843	

W					
	$n=0$	$n=1$	$n=2$	$n=4$	$n=6$
	0.	0.	0.	0.	0.
20.	0.0529	1.5353	1.4679	-1.2055	-0.2894
40.	0.0516	2.3126	2.1855	-2.2556	-0.5822
60.	0.0515	3.3302	4.6014	-4.0391	-0.7125
80.		4.4445	6.8650	-5.5191	-0.8440
100.		5.6864	9.5202	-6.8946	-0.7002
200.		13.558	21.090	-11.591	-0.4335
300.		22.440	48.311	-2.0911	-0.9729
400.		32.476	64.486	-1.1983	
500.		41.030	88.044	-1.1838	
600.		47.176	102.31	-1.1743	
700.		52.041	111.23	-1.1742	

$U = \sum U_n \cos n\theta$	0°	30°	60°	90°	120°	150°	180°
0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
20.0	-1.2635	-0.9168	-1.0427	-0.5623	-0.6324	-0.3591	-0.2038
40.0	-2.4932	-1.7992	-2.0731	-1.0906	-1.2438	-0.7161	-0.4090
60.0	-3.6086	-2.6011	-3.0453	-1.5945	-1.8020	-1.0468	-0.6044
80.0	-4.6222	-3.3299	-3.9668	-2.1751	-2.3096	-1.3578	-0.7907
100.0	-5.5371	-3.9864	-4.8491	-2.7412	-2.7677	-1.8469	-0.9671
200.0	-8.1424	-6.7447	-8.5371	-3.3399	-4.3712	-2.7849	-1.7074
300.0	-9.4790	-7.2135	-10.831	-3.9090	-4.9835	-3.3045	-2.1661
400.0	-9.6711	-7.0245	-10.414	-3.6867	-4.8355	-3.3380	-2.2447
500.0	-8.2071	-5.9330	-10.023	-3.0573	-4.1094	-2.4225	-2.0849
600.0	-5.9054	-4.3225	-7.881	-2.1649	-2.9532	-2.1576	-1.5763
700.0	-3.0822	-2.2601	-4.233	-1.1178	-1.5411	-1.1923	-0.8467
800.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0

$V = \sum V_n \sin n\theta$	0°	30°	60°	90°	120°	150°	180°
0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
20.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
40.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
60.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
80.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
100.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
200.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
300.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
400.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
500.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
600.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
700.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
800.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0

$W = \sum W_n \cos n\theta$	0°	30°	60°	90°	120°	150°	180°
0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
20.0	3.0246	2.1998	2.0571	1.5644	1.3876	-0.3634	-1.6661
40.0	5.0083	3.5727	0.2711	3.0436	2.3455	-3.368	-2.630
60.0	7.6352	5.3660	-3.0991	5.0268	3.6402	-4.021	-9.917
80.0	10.8131	7.5251	-7.888	7.4493	5.2433	-17.31	-2.0040
100.0	14.6691	9.998	-14.232	10.248	7.1221	-13.25	3.2754
200.0	39.678	25.803	-6.0650	28.248	-19.621	2.3191	12.561
300.0	10.186	44.585	-11.337	49.561	-54.837	4.8334	24.3071
400.0	100.91	63.426	-17.162	70.126	-50.237	7.1759	33.856
500.0	128.06	80.126	-22.763	89.274	-63.814	9.0244	45.959
600.0	149.07	93.096	-26.524	103.53	-74.319	10.312	53.480
700.0	162.29	101.28	-28.837	112.45	-80.928	11.053	58.108
800.0	166.79	104.07	-29.617	115.49	-83.180	11.293	59.666

