I－29　有限帯板法による有限変位解析の基礎的研究

長岡技術科学大学　正会員　林　　正
大阪大学　工学部　正会員　前田　幸雄
新日本製鉄　正会員　森　寛司

1. まえがき

有限要素法は複雑な形状を有する構造物の種々の非線形問題に適用することができるが，構造全体を解析することは計算時間の点で困難であり，主として局部的な応力解析に用いられている。一方，有限帯板法は等断面の薄肉構造の全体解析に適した極めて効率の良い解法であるが，有限変位問題に適用した研究は皆無に近く，解法の精度や適用性については調べられていない。有限帯板法を線形解析や座屈解析に適用した例は数多く報告されており，精度の良い解析結果が得られているが，これらの解析に用いられた解式をそのまゝ有限変位解析に用いることには問題があると考えられる。すでに報告した有限帯板法による非線形解析に関する研究結果[1)~3)]から，有限帯板法を薄肉構造の有限変位解析へ適用するために検討した結果を報告する。

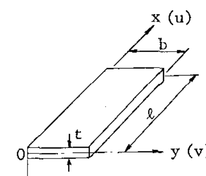


図-1 帯板要素

2. 有限変位解析に関する検討

帯板法に関する大部分の研究では，帯板要素の面内変位 u, v の幅方向（y軸方向）の変位関数には1次式が用いられているので節線変位は4自由度（$u, v, w, \theta=\partial w/\partial y$）となり，面内と面外成分が連成する有限変位問題に用いるには検討する必要がある。また，長手方向（x軸方向）の変位関数（U_m, V_m, W_m）については，帯板が両端（$x=0, \ell$）で単純支持されている場合には式(1)の三角関数が一般的に用いられているが，両端において直歪 ε_x の線形項はつねに零になるので，x軸方向の荷重が端部に作用する場合には解析上の矛盾が生じる。さらに，両端において v と w は零であるので，支承に直接支持されていないフランジやウェブでは過度の拘束を加えることになる。

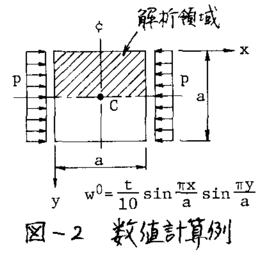
$$U_m=\cos(m\pi x/\ell),\qquad V_m=W_m=\sin(m\pi x/\ell)\qquad (m=1,2,3,\cdots)\tag{1}$$

マトリックス法による有限変位解析では，移動座標を用いることにより要素の剛性行列の高次の非線形項を省略することができるが，有限帯板法では移動座標を用いることが困難であるので高次の非線形項まで採用しなければならない。また，半解析的手法である有限帯板法の特徴を生かすために，計算効率の良い解式の定式化と数値解法の開発が必要である。以上のことから，有限変位解析において次の事項を検討した。

① 面内変位を3次式で表わし，節線の一般化変位に2成分 $\phi=\partial u/\partial y$, $\psi=\partial v/\partial y$ を加えて6自由度とする。
② x軸方向の変位関数には式(1)に式(2)の第0項を加える。また式(1)の U_m の代りに式(3)を検討する。

$$U_0=1-2(x/\ell),\qquad V_0=W_0=1\tag{2}$$
$$U_m=\sin(2m\pi x/\ell)\qquad (m=1,2,3,\cdots)\tag{3}$$

③ 剛性行列には変位に関する2次の非線形項までを採用し，解析精度と計算の効率を上げるために剛性行列を解析的に求める。
④ (4-6)自由度の帯板要素を開発し，補剛材等に用いる。また補剛材を梁要素で表わす場合には，非線形項を加えた立体の梁要素の剛性行列を用いる。
⑤ 有限帯板法に適した変位増分法を開発して計算時間を短縮する。



図－2　数値計算例

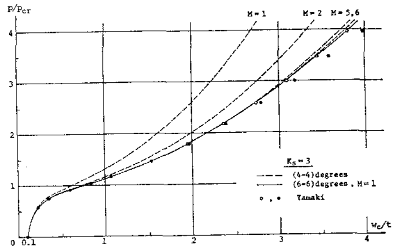
3. 数値実験による解法の考察

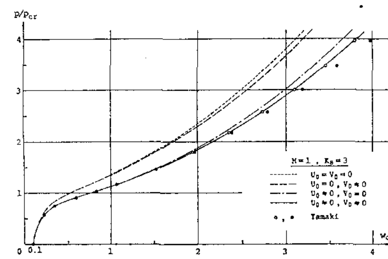
（1）変位関数と分割数の検討　図-2のような面内圧縮荷重を受ける四辺単純支持の正方形板の有限変位解析について帯板法の精度を調べる。載荷辺は変形後も直線を保つものとし，非載荷辺では面内変位は拘束されないものとした。薄板のポアソン比は $\nu=1/3$ であり，初期たわみ w^0 は板厚の1/10とした。薄板の中央点Cのたわみ w_c の計算値を図-3～5に示す。図中の記号Mは帯板要素の数を，K_s は式(2)の第0項を含めた式(1)の対称モードの項数を表わす。また，○と●印は級数解[4)]による値であり，○印は●印

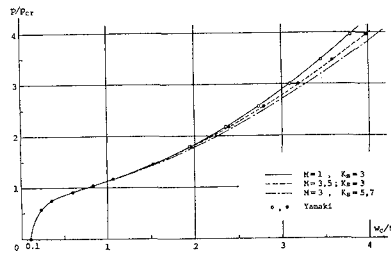
において x と y 軸方向の第2項の連成成分を省略した値である。図－3，4より多自由度と第0項の効果は明らかである。また図－5より，Yamaki の解[4]よりも精度の良い値が得られている。図－6では，初期たわみに sine の3半波を用いた。

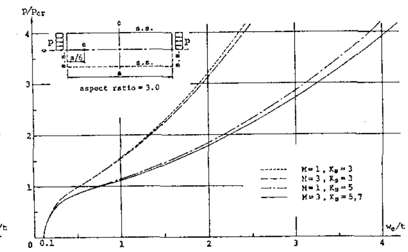
（2）適用範囲の検討

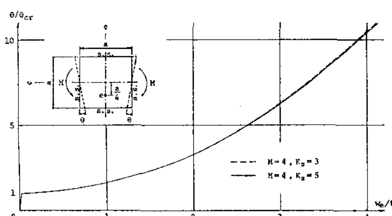
図－7は，モーメントが作用した場合の計算値を，図－8は，図－2の正方形板の非載荷辺のたわみとたわみ角を拘束した場合である。図－9は，四辺で面内変位を拘束した正方形板に面外方向に等分布面荷重が作用した場合であり，Levy の解[5]とよく一致している。図－10では，梁要素に置き換えた補剛材の解析精度を調べた。図－11は，ライズ比が1/100の偏平アーチの飛移を，棒理論[6]による計算値と比較した。

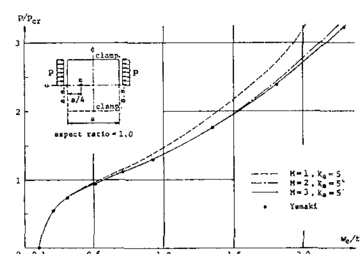

図－3　節線自由度の比較

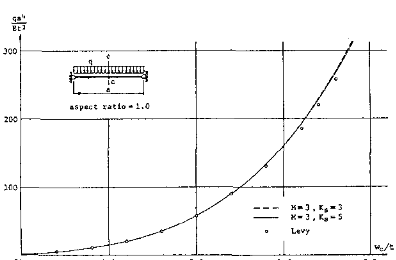

図－4　第0項の検討

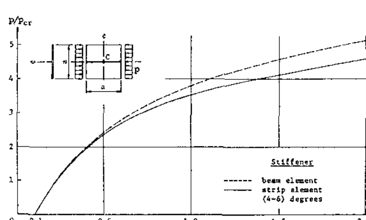

図－5　分割数と項数の検討

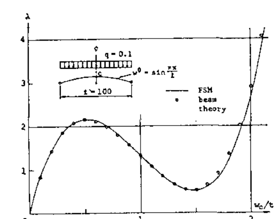

図－6　長方形板（a/b＝3）


図－7　面内曲げによる後座屈解析


図－8　非載荷辺固定の場合


図－9　正方形板の面外曲げ


図－10　補剛板の有限変位解析


図－11　偏平アーチの飛移

4．結　語　以上の数値計算例では，本研究で定式化した有限帯板法は十分な精度を有しており，有限要素法と同程度の解が得られたものと考えられる。Newton 法ではすべての変位成分の各級数項を3桁まで収束させたが，そのときの反復回数は3～4回で優れた収束性を示した。本計算例以外の境界条件に対する適用性を確める必要があるが，本報告の結果より，有限帯板法の適用範囲は限られるが，平板の薄肉構造の有限変位解析には有限要素法よりも計算効率のよい有用な解析法であるといえる。

1) Maeda,Y., M.Hayashi & K.Arioka : Elasto-Plastic Analysis of Thin-Walled Structures by Finite Strip Method, Tech. Rep. of the Osaka Univ., Vol.26, 1976.　2) 前田・林・森：局部モードを用いた有限帯板法，JSSC第13回マトリックス解析法研究発表論文集，1979.　3) 前田・林・森：有限帯板法による薄板の有限変位解析，昭和55年度土木学会関西支部年次学術講演会．
4) Yamaki,N. : Postbuckling Behavior of Rectangular Plates with Small Initial Curvature Loaded in Eage Compression, J. of Appl. Mech., Vol.26, Trans. ASME, Vol.81, 1959.　5) Levy,S. : Large Deflection Theory for Rectangular Plates, Proc. of Symp. in Appl. Math., Vol.1, 1949.　6) 前田・林：構造解析における多元連立非線形方程式の数値計算法，JSSC第11回マトリックス解析法研究発表論文集，1977.