

熊谷組 正員 松尾 哲彦
 東京大学工学部 正員 西野 文雄
 東京大学工学部 学生員 堀井 秀久

1. まえがき シェルの有限変位問題に対する数值解については数多くの研究と計算結果が報告されているが、そのほとんどが基本式を増分形式で求め、荷重を漸増させて解を求める手法を採用している。これに対し全荷重と全変位の間の関係式を求め、その非線形式を解いている例は少なく、ここでは有限変位微小ひずみ問題について全荷重-全変位関係式を導き、増分関係を用いてその解を求めた。なお折れ板の集合体でシェル構造物に近似する。

2. 剛体変位の除去 3次元連続体Dを考え、D内の任意の点の挙動をLagrangeの方法によって記述する。直交デカルト座標 X_1, X_2, X_3 及び X_i 軸に沿って直交基底ベクトル系 $\hat{e}_i$ を選ぶ。DをN個の微小領域 $D^{(n)}$ ($n=1, 2, \dots, N$)に分割すると、 $D^{(n)}$ 内の任意の点の変位 $u = u_i \hat{e}_i$ は極分解の法則より

$$u_i = r_i + Q_{ij} v_j, \quad r_i = (Q_{ij} - \delta_{ij}) X_j + c_i \quad (1)$$

と分解される。ここに r_i は剛体運動による変位成分、 v_j は変形運動による変位成分、 Q_{ij} は剛体回転を示す直交テンソルである。 δ_{ij} はクロネッカのデルタである。

Dを薄板とし、Dの中央面 S_m に沿って X_1, X_2 軸を、板厚方向に X_3 軸を選ぶ。Kirchhoff Loveの仮定より、D内の任意の点Pの変位 $U = U_i \hat{e}_i$ は

$$U = u + X_3 (n - \hat{e}_3), \quad n = \frac{\partial x^*}{\partial x_1} \times \frac{\partial x^*}{\partial x_2} / \left| \frac{\partial x^*}{\partial x_1} \times \frac{\partial x^*}{\partial x_2} \right| \quad (2)$$

となる。ここに $u = u_i \hat{e}_i$ は点Pを S_m 上に正射影した点 P^* における変位、 x^* は点 P^* の変形後の位置ベクトルである。 n は変形後の中央面の法線ベクトルである。式(1)はKirchhoff Loveの仮定に対し厳密な変位場である。式(2)より、Greenのひずみテンソルを求めると、非零のひずみ成分は

$$E_{\alpha\beta} = E_{\alpha\beta}^0 + X_3 K_{\alpha\beta} \quad (3)$$

$$E_{\alpha\beta}^0 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial u_\beta}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial u_k}{\partial x_\alpha} \frac{\partial u_k}{\partial x_\beta} \right) \quad (4)$$

$$K_{\alpha\beta} = \frac{\partial^2 x^*}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} \cdot n \quad (\alpha, \beta = 1, 2, \quad k = 1, 2, 3) \quad (5)$$

となる。 $E_{\alpha\beta}^0$ は面内ひずみ、 $K_{\alpha\beta}$ は変形後の中央面の曲率を示す。Dを S_m に垂直な面で分割し、各微小領域内で式(2)の変位 $U = U_i \hat{e}_i$ を式(1)に従って分解すると、微小ひずみ問題では $|\frac{\partial v_j}{\partial x_i}| \ll 1$ とでき、 $n = (-\frac{\partial v_1}{\partial x_1}) g_1 + (-\frac{\partial v_2}{\partial x_2}) g_2 + g_3$ となる。ここに g_i は $g_i = Q_{ki} \hat{e}_k$ で与えられる直交基底ベクトル系で、各領域内で一定である。また式(3)のひずみは

$$E_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial u_\beta}{\partial x_\alpha} \right) + X_3 \left(-\frac{\partial^2 v}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} \right) \quad (\alpha, \beta = 1, 2) \quad (6)$$

となる。したがって式(2)、(3)の非線形な変位場及びひずみ変位関係は微小領域内では剛体変位成分を除去すれば、それぞれ線形式に帰着する。

薄板では、有限要素法における一般化変位として、 u_i の他に有限な回転角 θ_i が存在するが、 θ_i もまた式(1)と同様に、

$$\theta_i = \theta_i^R + Q_{ij} \omega_j \quad (7)$$

となる。ここに θ_i^R は剛体運動による回転角、 ω_i は変形運動による微小回転角である。 θ_i, θ_i^R は有限な角度量でベクトル量ではない。

3. 剛性方程式 2.より薄板の剛性方程式は

$$\{F\} = [K(\{\theta\})] \{\theta\} - \{F_0(\{\theta\})\} \quad (8)$$

$$[K] = \sum_{n=1}^N \begin{bmatrix} (n) \\ T \end{bmatrix}^T [K] \begin{bmatrix} (n) \\ T \end{bmatrix}, \quad \{F_0\} = \sum_{n=1}^N \begin{bmatrix} (n) \\ T \end{bmatrix} [K] \begin{bmatrix} (n) \\ T \end{bmatrix} \{d\} \quad (9)$$

となる。ここに、 $\{g\}$ は一般化変位ベクトル、 $\{F\}$ は一般化外力ベクトル、 $[T]$ 、 $[K]$ 、 $[d]$ はそれぞれ各領域で定められる変変換マトリックス、微小理論による要素剛性マトリックス、剛体変位ベクトルである。式(8)は $\{g\}$ について高次の非線形形式である。シェル構造物についても式(8)と同等のものを得られる。

4. 逐次代入法 式(8)より、次の反復方程式を作る。

$$\{g^{(n+1)}\} = [K(\{g^{(n)}\})]^{-1} (\{F\} + \{F_0(\{g^{(n)}\})\}) \quad (10)$$

$[K(\{g^{(n)}\})]$ 及び $\{F_0(\{g^{(n)}\})\}$ は、 $\{g^{(n)}\}$ より各領域における $\{T\}$ 、 $\{d^{(n)}\}$ を決定し、式(9)より求める。式(10)よりある収束値 $\{g^*\}$ が得られたときこれを解とする。式(9)からわかるように、 $[K(\{g\})]$ は正値対称マトリックスで、特異性を持たない。すなわち式(10)は特異点でも解を与える。

一般の有限変位問題ではアーチの飛び移り現象 (snap through) のように変位に対して多価性を持つ場合が多く、このような問題では未知量を変位ではなく、荷重にする方が数値計算上都合がいい。このとき $[K]$ の形をできるだけ変えず方程式を解く方が便利であり、そのための方法を用いる。

5. 数値計算例

(i) 扁平アーチ 初期形状

が正弦波形で与えられている扁平アーチの等分布荷重載荷による飛び移り及び分枝座屈の計算結果を Fig. 1 に示す。この問題は本来一軸部材に対するものであるが、ここでは薄板要素を幅方向に1要素、部材軸に沿って8要素を用いて構成し、一軸部材に対応する条件のもとで中央点の変位を制御して解析を行なった。図は横軸に中央点の鉛直変位とライズの比、縦軸に Timoshenko が求めた座屈荷重 Q_{cr} と 載荷荷重の比をとっている。Fig. 2, Fig. 3

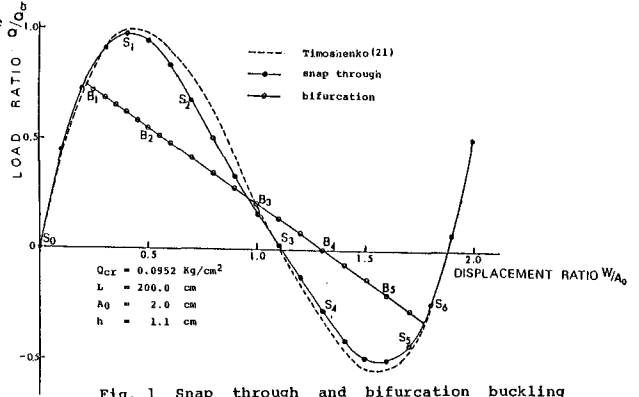


Fig. 1 Snap through and bifurcation buckling of shallow arch

はそれぞれ飛び移り、分枝座屈の場合の形状の推移を示したものである。S1 ~ S6, A1 ~ A5 は Fig. 1

の記号と対応している。(ii) 円筒シェル 単純支持された円筒シェルの中央点に集中荷重が載荷したときの荷重変位曲線を Fig. 4 に示す。図は横軸に中央点の鉛直変位、縦軸に荷重をとっている。計算は

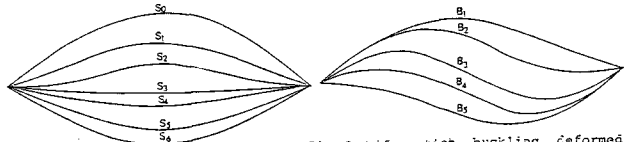


Fig. 2 Snap through deformed configuration

Fig. 3 Bifurcation buckling deformed configuration

斜線の部分を 3×3 の長方形要素に分割し、2軸対称の拘束を与えて行なった。この問題では制御する変位成分を適宜変える必要があり、中央点の鉛直変位に対して多価性がある平衡点では、端部の中央点の鉛直変位を制御して計算を行なった。点線は Sabir, Lock が修正増分法を用いて求めた結果である。

6. 結論

最後に本方法の特長として次のような点が挙げられる。(1) 厳密な支配方程式と簡略な剛性方程式に帰着させることができる。(2) 取り扱い困難な有限回転角を微小回転角に帰着させることができる。(3) 解べき方程式が逐次計算に都合のいい形となっている。(4) 方程式に特異性がなく、特異点上でも解を得ることができる。

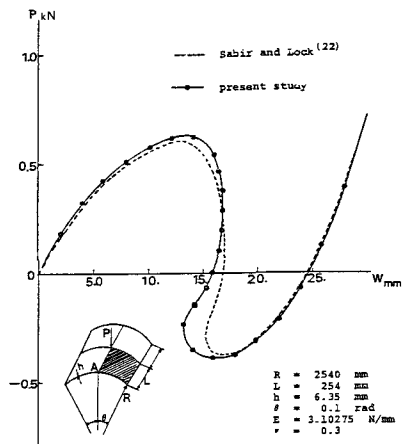


Fig. 4 Load-displacement curves for hinged cylindrical shell

参考文献 西野文雄、池田清宏：トラス構造物の有限変位解析、土木学会第34回年次学術講演概要集第I部、pp. 75-76。