I-27　有限変位するトラス構造物の静的非線形応答

東京大学工学部　学生員　池田清宏
東京大学工学部　正員　西野文雄
法政大学工学部　正員　阿井正博

<u>1. まえがき</u>　構造系の有限変位解析については数多くの研究成果が報告されている。これらの研究で求められている支配方程式を定式化に着目し分類すると、手法についてはLagrangeの方法を用いる手法と更新Lagrangeの方法を用いる手法、基本として選ぶ未知変数については節点変位成分を用いる手法と節点位置成分を用いる手法に分けられ、力、変位成分については全体外力－全体節点変位（全体節点位置）に関し支配方程式を求める手法と増分外力－増分節点変位（増分節点位置）に関し支配方程式を求める手法に分けられ、その各々について剛体変位の除去を考える手法と考えない手法などに大別される。これらのなかで、数値解が比較的求め易いという理由で、更新Lagrangeの手法により物体内の点を表わし、増分外力－増分節点変位に関する支配方程式を剛体変位の除去を用いて定式化する手法が現在では最も多く用いられている。これに対し、本報告ではLagrangeの手法により物体内の点を表わし、全体外力－全体節点位置に関する支配方程式を剛体変位の除去を用いずに定式化する手法に依りトラス構造物の有限変位問題の支配方程式を求めている。

<u>2. 軸力部材の剛性方程式</u>　軸力のみを受ける部材Pqを考え、この部材が外力の作用を受けて釣り合った状態を図1に示す。空間座標として右手系直交デカルト座標$\{x_1, x_2, x_3\}$を考え、その基ベクトルを

$$\underset{\sim}{i} = \langle i_1, i_2, i_3 \rangle \tag{1}$$

と表わす。釣り合い位置の部材端x^pからx^qに向く単位ベクトルを$\hat{i}_1$、任意の単位ベクトルを$\bar{i}_1$とし、$\hat{i}_1$, $\bar{i}_1$を一つの成分とする任意の右手系の直交単位ベクトルを次の様に表わす。

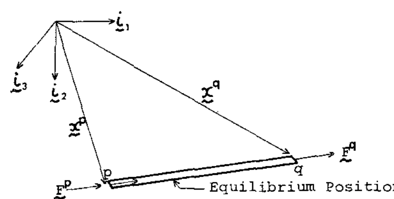

Fig.1 Displaced Member

$$\hat{\underset{\sim}{i}} = \langle \hat{i}_1, \hat{i}_2, \hat{i}_3 \rangle \ , \quad \bar{\underset{\sim}{i}} = \langle \bar{i}_1, \bar{i}_2, \bar{i}_3 \rangle \tag{2}$$

部材Pqには分布外力が存在せず、両端にのみ力が作用する場合を扱うものとすると、釣り合い式は軸力をN、$\hat{i}$における外力を$\hat{F}_1^p$, $\hat{F}_1^q$として

$$\hat{F}_1^p + \hat{F}_1^q = 0 \ , \quad N = -\hat{F}_1^p \tag{3}$$

となる。構成方程式として次の線形関係が成り立つ弾性部材を考える。

$$N = EA(\hat{\ell} - \ell)/\ell \tag{4}$$

ここに、$\hat{\ell}$は変形後の部材長である。式(3), (4)よりNを消去すると、$\hat{i}$で展開した両端に働く力$\hat{F}$は

$$\hat{F} = -EA\frac{\hat{\ell}-\ell}{\ell}\langle 1,0,0, -1,0,0\rangle' \tag{5}$$

と表わせる。この$\hat{i}$の成分に対する関係式を$\bar{i}$で展開した成分で表わし、式の変形を進めると

$$\bar{F} = \frac{EA}{\ell}K^1\bar{x} + \frac{N}{\hat{\ell}}K^2\bar{x} - \frac{EA}{\hat{\ell}}K^1\bar{x} \tag{6}$$

が得られる。ここに、K^1は剛性マトリックス、K^2は幾何マトリックスである。任意に選べる$\bar{i}_1$を

$$\bar{i}_1 \approx \hat{i}_1 \equiv \langle (x^q)-(x^p) \rangle / |(x^q)-(x^p)| \tag{7}$$

を満足するように選ぶと、式(6)は

$$\bar{F} = \bar{K}\bar{x} - \bar{F}_0 \tag{8}$$

と表わせる。ここに

$$\bar{K} = \frac{EA}{\ell}K^1 + \frac{N}{\hat{\ell}}K^2 \ , \quad \bar{F}_0 = EA\langle 1,0,0, -1,0,0 \rangle' \tag{9}$$

式(8)は$\bar{i}$で展開した成分を用いて次のように表わされる。

$$\mathbb{F} = \mathbb{K}x - \mathbb{F}_0 \qquad (10)$$

ここに、 $\mathbb{K} = [T_{\bar{i}i}]'\,\bar{\mathbb{K}}\,[T_{\bar{i}i}]$, $\mathbb{F}_0 = -[T_{\bar{i}i}]\,\bar{\mathbb{F}}_0$ (11)

であり、$[T_{\bar{i}i}]$は i と $\bar{i}$ の間の座標変換マトリックスである。

式(5)は式(7), (10)により近似されたことになる。 さらに $\bar{i}_1 = \hat{i}_1$ のときは式(5)と式(7), (10)とは一致する。式(7), (10)は式(5)を次のような逐次近似で解くのに有利な形にしたものである。

3. 逐次近似による数値解 式(7), (10)を逐次近似で解くものとする。任意に選んでよい $\bar{i}_1$ を逐次近似の ν 回目の初期値 $(x^p)^\nu$, $(x^q)^\nu$ を用いて、

$$\bar{i}_1 = <(x^q)^\nu - (x^p)^\nu> / |(x^q)^\nu - (x^p)^\nu| \qquad (12)$$

と選ぶものとする。このように $\bar{i}_1$ を取ると式(7), (12)を比較して明らかなように、条件式(7)は収束が進むにつれて満足されるので、式(10)だけを満たす解を求めればよいことになる。トラス構造に作用する外力 $\mathbb{F}$ を定ベクトル $\mathbb{f}$ と外力の大きさを表わす係数 f との積で

$$\mathbb{F} = f \cdot \mathbb{f} \qquad (13)$$

と表わす。式(10)を x について解き、式(12), (13)を用いると、式(10)を解く逐次近似式が

$$x^{\nu+1} = f\,\mathbb{K}^{-1}(x^\nu) + \mathbb{K}^{-1}(x^\nu)\,\mathbb{F}_0(x^\nu) \qquad (14)$$

と求まる。式(5)の $\bar{\mathbb{F}}$ を i 系の成分 $\mathbb{F}$ に変えた式

$$\mathbb{F} = -EA\frac{\hat{\ell}-\ell}{\ell}[T_{\bar{i}i}]' < 1,0,0,-1,0,0 >' \qquad (15)$$

を Newton－Raphson 法で解く修正式を求めると式(14)と完全に一致する。したがって、逐次近似式(14)は Newton－Raphson 法と同じ収束をする。このため全体外力－全体節点位置を直接逐次で求める有限変位問題としては最も単純な形の支配方程式になっているにもかかわらず、数値解を求める上での収束性においても既往の数多くの手法と同等の定式化となっている。

4. 分岐点と分岐後のつり合い経路の数値解 つり合い経路の分岐点および荷重の極限点において接線係数マトリックスは特異となり $|\mathbb{K}^t(x)| = 0$ が成り立つ。式(11)の $\mathbb{K}$ は逐次近似の収束とともに $\mathbb{K}^t$ に収束するので、収束解が求まった段階における $\mathbb{K}(x)$ の固有値に値が零のものが存在することが分岐点または荷重の極限点の条件となる。分岐後のつり合い経路上の点を求める時には、分岐点 x における零固有値に対応する固有ベクトル方向の変位増分を式(14)の初期値として与える。

5. 数値計算例 図.2に示すトラス・ドームの表.1の荷重パターンに対するつり合い経路を求め、図.3に示した。

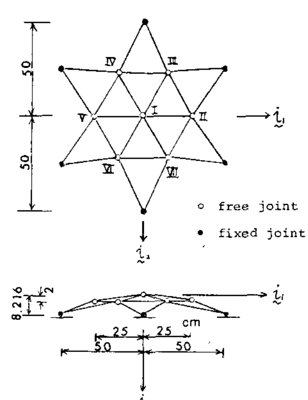

Fig.2 Truss Dome Model

Table.1 Loading Pattern f_3

Joint No.	Pattern (a)
I	0.5
II	1.0
III	1.0
IV	1.0
V	1.0
VI	1.0
VII	1.0

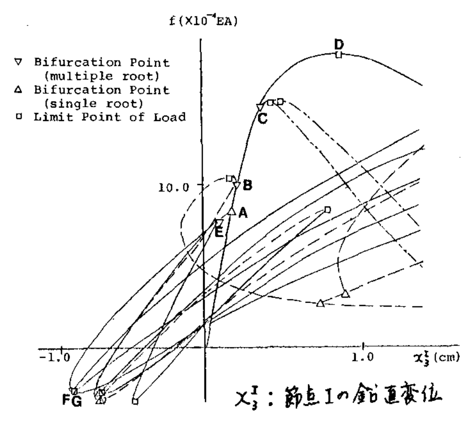

Fig.3 Equilibrium Path

参考文献 西野・池田：トラス構造物の有限変位解析 土木学会第34回年次学術講演会講演概要集 I-38