I -26　3次元有限変位問題での一般回転座標について

法政大学工学部　正員　阿井 正博
東京大学工学部　正員　西野 文雄

1. はじめに

3次元空間での微小回転はベクトル表示のもとで理論展開に組み込まれるのが普通であるが、有限な回転が線形ベクトル空間で扱うことができないことは周知の処である。離散化系の3次元有限変位問題ではその有限な回転およびモーメントが合理的に表現されることが必要となるが、本報告では、それらの1つの組織的な扱いを有限回転のテンソル解析の立場より提案したい。

2. 有限回転のテンソル展開

回転という事象は、その微小増分が線形ベクトル空間にあるということから、いわゆるテンソル場をつくるものと考えられる。そのテンソル展開をするのに次の2組の右手系直交単位ベクトルを考える。1つは空間に固定された単位ベクトルであり $\{\mathrm{I}_{[I]}\} = \{\mathrm{I}_{[1]}, \mathrm{I}_{[2]}, \mathrm{I}_{[3]}\}$ と表わすものとし、もう1つは空間で有限に回転しうる単位ベクトルであり $\{\mathring{i}_{(i)}\} = \{\mathring{i}_{(1)}, \mathring{i}_{(2)}, \mathring{i}_{(3)}\}$ と表わすものとする(Fig. 1)。

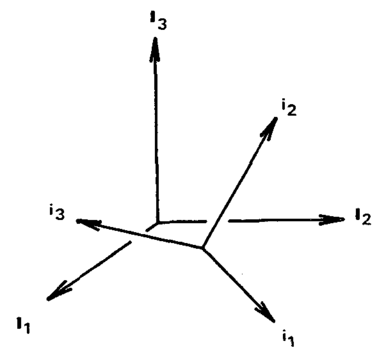

Fig. 1　Space-Fixed and Rotatable Unit Vectors

$\{\mathring{i}_{(i)}\}$ の回転は、$\{\mathring{i}_{(i)}\}$ から $\{\mathrm{I}_{[I]}\}$ への変換

$$\mathring{i}_{(i)} = T^{[J]}_{(i)}\, \mathrm{I}_{[J]} \qquad (1)$$

を意味する直交マトリックス $[T^{[J]}_{(i)}]$ で完全に規定される。このとき、$[T^{[J]}_{(i)}]$ の9成分の中には

$$T^{[K]}_{(i)}\, T^{[K]}_{(j)} = \delta_{ij} \qquad (2)$$

で表わされる6つの正規直交性の拘束条件があり、回転の自由度は3と考えてよい。ただし、前式中の δ_{ij} は Kronecker のデルタを意味する。

ここで、例えば Euler 角のような、3つの独立なパラメータ $\{e^\alpha\} = \{e^1, e^2, e^3\}$ を用いて回転を、すなわち $[T^{[J]}_{(i)}]$ を規定する系一般を考えるものとし、$\{e^\alpha\}$ の値を変化させることにより任意の $[T^{[J]}_{(i)}]$ が表現されるとき $\{e^\alpha\}$ を一般回転座標とよぶものとする。

有限な回転 $\{e^\alpha\}$ での一般座標の微小増 $\delta\{e^\alpha\}$ による $\{\mathring{i}_{(i)}\}$ の変化は、式(1)の微分関係と $\mathrm{I}_{[I]} = T^{[I]}_{(j)}\, \mathring{i}_{(j)}$ の変換により、$\{\mathring{i}_{(i)}\}$ に関して

$$\delta \mathring{i}_{(i)} = T^{[K]}_{(i),\alpha}\, T^{[K]}_{(j)}\, \delta e^\alpha\, \mathring{i}_{(j)} \qquad (3.a)$$

と表わすことができる。ここに、記号 $(\ )_{,\alpha}$ は e^α に関する微分を意味する。同じ微小回転を、$\{e^\alpha\}$ での $\{\mathring{i}_{(i)}\}$ 軸まわりの微小回転成分 $\{\delta\theta_{(i)}\}$ を用いて右ねじの法則のもとに

$$\delta\Theta = \delta\theta_{(i)}\, \mathring{i}_{(i)} \qquad (4.a)$$

とベクトル表示するものとすれば、式(3)の $\delta\mathring{i}_{(i)}$ は

$$\delta\mathring{i}_{(i)} = e_{ijk}\, \delta\theta_{(k)}\, \mathring{i}_{(j)} \qquad (3.b)$$

とも表わすことができ、式(3.a, b)を等しいとおくことにより $\{\delta\theta_{(i)}\}$ と $\delta\{e^\alpha\}$ の関係が

$$\delta\theta_{(i)} = \beta^{(i)}_\alpha\, \delta e^\alpha \qquad (5)$$

$$\beta^{(i)}_\alpha = \frac{1}{2}\, e_{ijk}\, T^{[L]}_{(j),\alpha}\, T^{[L]}_{(k)} \qquad (6)$$

として求まる。ただし、e_{ijk} は交代記号を表わす。

微小回転のベクトル表示は一般に式(4.a)のように表わされるが、その表現を一般化し、$\delta\Theta$ を $\delta\{e^\alpha\}$ に関して

$$\delta\Theta = g_\alpha\, \delta e^\alpha \qquad (4.b)$$

と表わすものとして、前式を一般座標 $\{e^\alpha\}$ の共変基ベクトル $\{g_\alpha\}$ の定義式とする。式(4.a, b)の右辺を等しいとおいて式(5)の関係を用いることにより、$\{g_\alpha\}$ は $\{\mathring{i}_{(i)}\}$ に関して

$$g_\alpha = \beta^{(i)}_\alpha\, \mathring{i}_{(i)} \qquad (7)$$

と表わされることになる。式(4.b)は、物理的には、単位ベクトル $\mathring{i}_\alpha = g_\alpha / |g_\alpha|$ まわりの $\delta e^\alpha |g_\alpha|$ の大きさの回転、$\alpha = 1, 2, 3$、を重ね合わせた微小回転を表わす。

$\{e^\alpha\}$ が完備な一般座標であるためには、任意の $\{e^\alpha\}$

で$\{\mathbf{g}_\alpha\}$が零ベクトルでなく同一平面上にない、すなわち

$$\mathbf{g}_1 \cdot (\mathbf{g}_2 \times \mathbf{g}_3) \neq 0 \tag{8}$$

である必要がある。

一般座標の反変基ベクトル$\{\mathbf{g}^\alpha\}$は、$\mathbf{g}^\alpha \cdot \mathbf{g}_\beta = \delta^\alpha_\beta$で定義されるが、$\{\mathbf{e}_{(i)}\}$に関して

$$\mathbf{g}^\alpha = \beta^\alpha_{(i)}\, \mathbf{e}_{(i)} \tag{9}$$

と表わすものとすれば、式(7)の関係より係数マトリックス$[\beta^\alpha_{(i)}]$は$[\beta^{(i)}_\alpha]$の逆行列として定まる。

さらに計量テンソル$\{g_{\alpha\beta}\}$, $\{g^{\alpha\beta}\}$は基ベクトルの内積で定義され・・・回転テンソル場での種々のテンソル量が展開されるが、それらの展開や共変・反変微分等のテンソル場での作用素は他の3次元テンソル場一般と共通であり、例えばFlügge[1)]の一般曲線座標系での展開をそのまま適用することができる。

3. Euler 角への適用

Fig. 2 に示すような Euler 角$\{\varphi^\alpha\}$を一般回転座標の1例として取り上げるものとすれば、**2.** で定義した各テンソル量は具体的に次のように表わされる。

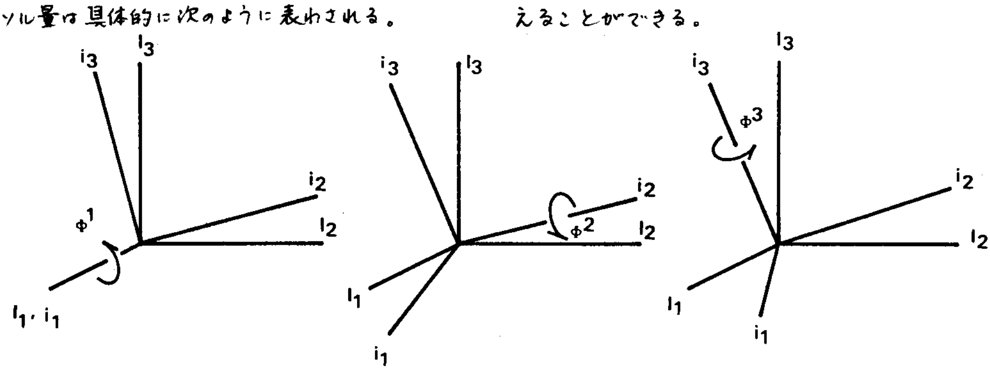

Fig.2 Eulerian Angle System

$$[T^{[J]}_{(i)}] = \begin{bmatrix} \cos\varphi^2\cos\varphi^3, & \begin{array}{c}\sin\varphi^1\sin\varphi^2\cos\varphi^3\\ +\cos\varphi^1\sin\varphi^3\end{array}, & \begin{array}{c}-\cos\varphi^1\sin\varphi^2\cos\varphi^3\\ +\sin\varphi^1\sin\varphi^3\end{array} \\ -\cos\varphi^2\sin\varphi^3, & \begin{array}{c}-\sin\varphi^1\sin\varphi^2\sin\varphi^3\\ +\cos\varphi^1\cos\varphi^3\end{array}, & \begin{array}{c}\cos\varphi^1\sin\varphi^2\sin\varphi^3\\ +\sin\varphi^1\cos\varphi^3\end{array} \\ \sin\varphi^2, & -\sin\varphi^1\cos\varphi^2, & \cos\varphi^1\cos\varphi^2 \end{bmatrix}$$

$$[\beta^{(i)}_\alpha] = \begin{bmatrix} \cos\varphi^2\cos\varphi^3, & -\cos\varphi^2\sin\varphi^3, & \sin\varphi^2 \\ \sin\varphi^3, & \cos\varphi^3, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{bmatrix}$$

$$[\beta^\alpha_{(i)}] = \begin{bmatrix} \frac{\cos\varphi^3}{\cos\varphi^2}, & \sin\varphi^3, & -\tan\varphi^2\cos\varphi^3 \\ -\frac{\sin\varphi^3}{\cos\varphi^2}, & \cos\varphi^3, & \tan\varphi^2\sin\varphi^3 \\ 0, & 0, & 1 \end{bmatrix}$$

$$[g_{\alpha\beta}] = \begin{bmatrix} 1, & 0, & \sin\varphi^2 \\ & 1, & 0 \\ \text{Sym.} & & 1 \end{bmatrix}, \quad [g^{\alpha\beta}] = \begin{bmatrix} \frac{1}{(\cos\varphi^2)^2}, & 0, & -\frac{\sin\varphi^2}{(\cos\varphi^2)^2} \\ & 1, & 0 \\ \text{sym.} & & \frac{1}{(\cos\varphi^2)^2} \end{bmatrix}$$

4. まとめ

前述のような一般回転座標を用いて3次元有限回転を表現するものとすれば、微小回転増分$\delta\boldsymbol{\Theta}$は式(4. b)のように一般座標の微分量に関して表わされるのが普通であろう。このとき、回転$\{e^\alpha\}$で作用しているモーメント$\mathbf{M}$は、$\{\mathbf{I}_{[I]}\}$, $\{\mathbf{e}_{(i)}\}$, $\{\mathbf{g}_\alpha\}$, $\{\mathbf{g}^\alpha\}$のいずれに関しても成分表示することができるが、$\{\mathbf{g}^\alpha\}$に関する共変成分$\{M_\alpha\}$を採用するものとすれば、$\mathbf{M}$の$\delta\boldsymbol{\Theta}$による微小仕事$\delta\Psi_R(e^\alpha)$は

$$\delta\Psi_R = \mathbf{M} \cdot \delta\boldsymbol{\Theta} = M_\alpha \delta e^\alpha \tag{10}$$

と表わされる。さらに、モーメント$\mathbf{M}$が回転の関数であり、共変成分に関して

$$M_{\alpha.\beta} = M_{\beta.\alpha} \tag{11}$$

の関係が成立するとき、式(10)は完全微分形であり積分経路によらないポテンシャル$\Psi_R(e^\alpha)$が存在し$\mathbf{M}(e^\alpha)$を保存モーメントと呼ぶことができる。

以上の意味で、一般回転座標$\{e^\alpha\}$に対してモーメントの共変成分$\{M_\alpha\}$は唯一の対応する成分表示と考えることができる。

〈参考文献〉

Flügge, W., "Tensor Analysis and Continuum Mechanics", Spninger-Verlag, 1972.