

早稲田大学 正員 依田 照彦
早稲田大学 正員 平嶋 政治
鉄建公団 小島 宗隆

1. はじめに

本研究では、薄肉空間曲線部材の一次元有限変位理論¹⁾の妥当性を確かめるべく、Hellinger-Reissnerの汎関数を用いた混合型有限要素の定式化を行い、変位成分に関して二次の項まで考慮した非線形問題の数値解析を行った。その際、従来の研究との比較を考慮し、直線はりおよび円弧はりの横斜れ座屈問題と関連させて、線形解と非線形解と求めた。

2. 解析方法

薄肉空間曲線部材の一次元有限変位問題を混合型の有限要素を用いて定式化する。

Hellinger-Reissnerの汎関数 Π_R は

$$\Pi_R = \iiint_V \{ \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} - B(\sigma_{ij}) - P_i u^i \} dV - \iint_{S_\sigma} \bar{P}_i u^i ds - \iint_{S_u} T_i (u^i - \bar{u}^i) ds \quad \dots \dots (1)$$

と表わされる。²⁾ここに、 σ_{ij} :応力テンソル、 ε_{ij} :ひずみテンソル、 $B(\sigma_{ij})$:コンプリメンタリーエネルギー関数、 P_i :物体力、 u^i :変位、 $\bar{P}_i$:表面力、 T_i :Lagrangeの乗数、 $\bar{u}^i$:境界(S_u 上)で規定された変位、である。

なお、一次元棒理論の場合には、 $B(\sigma_{ij})$ はヤング率 E とせん断弾性係数 G を用いて、

$$B(\sigma_{ij}) = \frac{1}{2E} (\sigma^{11})^2 + \frac{1}{2G} (\sigma^{12})^2 \quad \dots \dots (2)$$

とかける。

また、変位場としては、文献1)においてより変位に関する高次項を無視し、

$$U^1 = v^1 - y_2 \Gamma_2 - y_3 \Gamma_3 - \omega \Gamma_\theta, \quad U^2 = v^2 - y_2 A_2 - y_3 A_3, \quad U^3 = v^3 + y_2 B_2 - y_3 B_3, \quad \dots \dots (3.a,b,c)$$

を採用する。ここに、 v^1, v^2, v^3 はそれぞれ局所デカルト座標系 y_1, y_2, y_3 方向の変位であり、回転角 θ を含めた変位成分 v^i の2次項まで考慮すれば、式(3)の各量は次のようにかける。(ただし、 ω はより関数である。³⁾)

$$\Gamma_2 = v^1_{,1} + v^2 v^1_{,1}, \quad \Gamma_3 = v^1_{,1} - v^2 v^1_{,1}, \quad \Gamma_\theta = v^1_{,1} - \frac{1}{2} \chi_1 [(v^1_{,1})^2 + (v^1_{,2})^2] + \chi_2 v^1_{,1} + \chi_3 v^1_{,1},$$

$$A_2 = v^2_{,2}/2, \quad A_3 = v^2_{,2}, \quad B_2 = v^2_{,2}, \quad B_3 = v^2_{,2}/2. \quad \dots \dots (4.a \sim g)$$

上式において、 χ_1 は初期撓率、 χ_2, χ_3 は初期曲率であり、 $(\cdot)_{,1}$ は軸方向座標 θ^1 に関する微分を示し、 $(\cdot)_{,1}$ は θ^1 に関する共変微分を意味し、 $v^1_{,1} = v^1_{,1} - \chi_3 v^2 + \chi_2 v^3$, $v^2_{,1} = v^2_{,1} + \chi_3 v^1 - \chi_1 v^3$, $v^3_{,1} = v^3_{,1} - \chi_2 v^1 + \chi_1 v^2 \dots (5.a,b,c)$ となる。

一次元棒理論におけるひずみ場と応力場は、それぞれ

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{\sqrt{g}} \left[\Gamma_\theta - y_2 \Omega_u - y_3 \Omega_v - \omega \Omega_\theta + H^* \Gamma_\theta + R \frac{(\Gamma_\theta)^2}{2} \right], \quad 2 \varepsilon_{12} = -\frac{\Theta}{\sqrt{g} \sqrt{g}} \Gamma_\theta, \quad \varepsilon_{13} = \varepsilon_{22} = \varepsilon_{23} = \varepsilon_{33} = 0, \quad \dots \dots (6.a \sim f)$$

$$\sigma^{11} = E \varepsilon_{11}, \quad \sigma^{12} = 2 G \varepsilon_{12}, \quad \dots \dots (7.a, b)$$

と表わされる。ここに、

$$\sqrt{g} = 1 + \chi_2 y_3 - \chi_3 y_2, \quad \sqrt{g} = 1 + \chi_2 \dot{y}_3 - \chi_3 \dot{y}_2, \quad (\cdot \text{は薄肉板厚中心線上の値を示す}),$$

$$\Gamma_\theta = v^1_{,1} + \frac{1}{2} (v^1_{,1})^2 + \frac{1}{2} (v^1_{,2})^2, \quad \Omega_u = \Gamma_{2,1} - \Gamma_3 \Gamma_\theta - \chi_2 v^2 - \chi_3 \frac{v^2}{2} - \chi_1 \Gamma_3,$$

$$\Omega_v = \Gamma_{3,1} + \Gamma_2 \Gamma_\theta - \chi_3 v^2 + \chi_2 \frac{v^2}{2} + \chi_1 \Gamma_2, \quad \Omega_\theta = \Gamma_{\theta,1},$$

$$H^* = \frac{\chi_1}{\sqrt{g}} [(y_2)^2 + (y_3)^2 + \chi_2 y_2 \omega + \chi_3 y_3 \omega] - \omega_{,1} + \frac{\chi_1 \Theta}{\sqrt{g} \sqrt{g}} (y_2 \dot{y}_{3,2} - y_3 \dot{y}_{2,2}), \quad ((\cdot)_{,2} \text{は } \partial/\partial \theta^2 \text{ を意味する。})$$

$$R = \frac{1}{\sqrt{g}} [(y_2 + \chi_2 \omega)^2 + (y_3 + \chi_3 \omega)^2],$$

$$\Theta = \begin{cases} \theta^3 \left(2 + \frac{X_2 \dot{y}_{2,2} + X_3 \dot{y}_{3,2} \cdot \theta^2}{\sqrt{g}} \right) : \text{開区間}, \\ \theta^3 \left(2 + \frac{X_2 \dot{y}_{2,2} + X_3 \dot{y}_{3,2} \cdot \theta^2}{\sqrt{g}} \right) - \frac{\int \frac{h}{g} d\theta^2}{\int \frac{1}{g\sqrt{g}} \cdot \frac{1}{t} d\theta^2} \cdot \frac{g}{\sqrt{g}} \cdot \frac{1}{t} : \text{閉区間}, \end{cases} \dots (8.a \sim i)$$

(t:板厚)

であり、 θ^2 は横断面の板厚中心線に沿ってとった座標、 θ^3 は横断面において θ^2 に垂直な座標である。

式(2)~(8)を式(1)に代入し、Hellinger-Reissnerの汎関数 Π_R を変位成分(v^1, v^2, v^3, φ)、断面力($N, M_2, M_3, H, \omega, Z, M_p, T$)と外力で表示し、要素内で変位成分と断面力を一次式で近似すれば、 Π_R の停留条件より節点変位と節点力で表示された非線形の支配方程式が求まる。得られた非線形方程式に対し、ここでは二次の非線形項までを考慮し、Newton-Raphson法を用いて数値計算を行った。

3. 数値計算例

数値計算は図-1に示すような矩形断面($b=2\text{ cm}$, $t=0.5\text{ cm}$)

について行い、部材の形状としては、直線はり、円弧はり(図-2)およびらせんはり(図-3)を取り上げた。さらに、軸線長 $l=100\text{ cm}$ 、ヤング率 $E=2.1 \times 10^4 \text{ kg/cm}^2$ 、ポアソン比 $\nu=0.3$ とし、境界条件は一端固定・他端自由で、自由端に荷重と載荷することとした。

1) 直線はりの場合($X_1=X_2=X_3=0$)

境界条件にかかわらず、はりをも要素に分割すれば、線形解は厳密解と有効数字3ケタまで一致しており、非線形解を得るまでの反復計算回数は2~4回であった。有限変位問題の一部である横倒れ座屈問題と関連させるため、図-2(a)に示すように自由端に面外荷重 P_2 と面内荷重 P_3 を作用させ、 P_2 を増加させたときの面外変位 v^2 と回転角 φ を計算した。その結果、三次以上の高次項を無視した非線形解析でも座屈荷重付近までの非線形計算が可能であることが分かった。(図-2(a),(b)の実線および二点鎖線参照)

2) 円弧はりの場合($X_1=X_2=0, X_3=0.01$)

所要分割数・収束状況は直線はりの場合とほぼ同様であったが、4分割の場合断面力に若干の誤差が見られた。線形解と非線形解の関係は直線はりの場合と同様に横倒れ座屈の存在を示している。

3) らせんはりの場合($X_1=0.001, X_2=0, X_3=0.01$)

線形解については、R.H.Shellの場合の数値計算例および実験値⁴⁾と比較した結果、妥当な値であった。非線形挙動を調べるため、面内法線方向荷重 P_2 を自由端に作用させたときの面外変位 v^2 と回転角 φ を計算した。(図-3(a),(b))

4. あとがき

ここに示した非線形解析は、三次以上の高次項の影響を無視しているため、座屈後のような大きな変位は扱えないが、それ以前の有限変位解析に使用できることが分かった。おわりに、本研究は河上記念財団の助成によることを付記し、謝意を表します。

参考文献

- 1) 平嶋・井浦・依田：土木学会論文報告集，No.292，1979年12月。
- 2) Washizu, K.: Variational Methods in Elasticity and Plasticity, 1975.
- 3) Timoshenko, S.: Theory of Elastic Stability, 1936.
- 4) 土生・平嶋・井浦：第7回関東支部年次研究発表会，1980年1月16日。

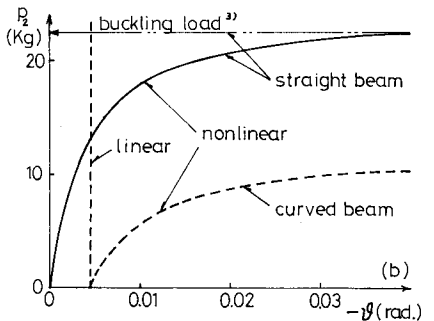
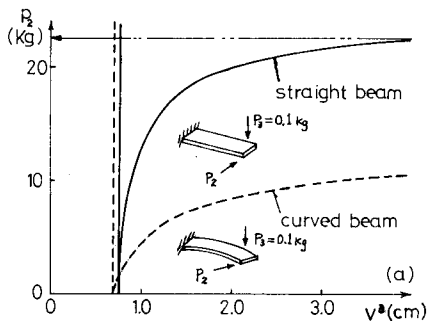
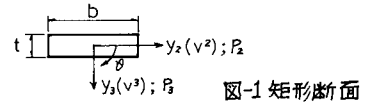


図-2 (a),(b) 直線はりおよび円弧はり(4要素)

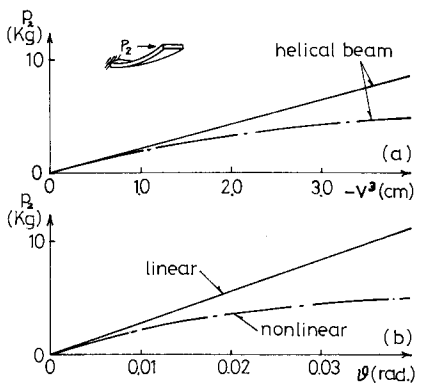


図-3 (a),(b) らせんはり(6要素)