

東京工業大学 学生員 深沢良信

東京大学工学部 正員 西野文雄

東京大学工学部 正員 三木千壽

1. まえがき 本報告は、岩熊、西野が先に報告した手法¹⁾を一軸曲げ棒部材の有限変位解析に対して適用を試み、結果を示すものである。ここでは節点位置成分と節点変位成分²⁾からなる基本未知量として選じ、全体外力と全体節点位置と結びつける変位方程式を、逐次近似法により解くのに有利な形に定式化した。微小変位問題は初期形状が大きな意味を持つが、有限変位問題では荷重状態によって形状の変化した構造物を解析対象とするため、初期形状そのものは大きな意味を失う。従って初期形状からの変化分である節点変位成分より節点位置成分も基本未知量としてみれば、有限変位解析としてより一般性があると考えられる。

2. 剛性方程式 はりの変形はベルヌーイ・オイラーの仮定に従うものとし、変形に伴って生じるひずみは微小であると仮定する。Fig.1に示すように、変形の生じていない一様断面直線棒の図心線に沿って x 軸、 y 軸と直交して z 軸をとり、物質点を (ξ, η) 座標で表わす。ひずみと応力を表現するベクトル $\epsilon_{\xi\xi}$, $\sigma_{\xi\xi}$ と、

$$\epsilon_{\xi\xi} = \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial \xi} - 1 = (y_g - \eta k) - 1, \quad \sigma = \sigma_{\xi\xi} \bar{u}_g \quad (1), (2)$$

と定義する。ここで u は変形後の (ξ, η) 点の位置ベクトル、 $\bar{u}$ は変形前の単位面積あたり働く力ベクトル、 $\bar{u}_g$ は変形後 g 方向の単位ベクトルである。また

$$y_g = z_g^2 + y_g^2, \quad k = \frac{-y_g z_g + z_g y_g}{y_g^2} \quad (3), (4)$$

である。 z_g と y_g は、変形後の図心線上の点の位置ベクトルの z 成分と y 成分で、フレイムは z 方向の微分を示す。構成方程式 $\sigma_{\xi\xi} = E \epsilon_{\xi\xi}$ と仮定すると、仮想仕事の式は、(1)~(4)式を考慮して

$$\int_0^L EA (y_g - 1) \delta y_g d\xi + \int_0^L EI k \delta k d\xi = \text{外力項} \quad (5)$$

となる。ここで A および I はそれぞれ変形前のはりの長さ、断面積および断面二次モーメントである。いま、 L が充分に短い場合には、はりの全長にわたって

$$\bar{u}_g \cdot \bar{u}_g \approx 1, \quad \bar{u}_g \cdot \bar{u}_z \approx 0 \quad (7), (8)$$

となるように y 座標系を選ぶことができ、さらにこのとき

$$y_g - 1 \approx z_g^2, \quad \delta y_g \approx \delta z_g^2 + \frac{y_g}{z_g} \delta y_g \quad (9), (10)$$

$$k \approx \frac{y_g}{z_g}, \quad \delta k \approx \frac{\delta y_g}{z_g} \quad (11), (12)$$

とみなすことが可能である。ただしここで $\bar{u}_g$ は g 方向の単位ベクトル、 $\bar{u}_z$ および $\bar{u}_y$ は正規直交直線座標系 y の基底ベクトルである。形状関数 u に対して1次関数、 y に対して2次関数として、それらを(9)~(12)式および(5)式に代入すると、はりの剛性方程式が次のように求まる。

$$F = (K_E + K_G) X - F_0 \quad (13)$$

ここで F ははりの両端に加わる一般化力、 X は一般化節点位置ベクトル、 F_0 は等価節点力である。また K_E , K_G は剛性マトリクスでそれぞれ K_E は幾何剛性マトリクスである。

3. 逐次近似計算 (13)式を全要素にわたって合成すると、次の非線形方程式が得られる。

$$F = \{K_E(X) + K_G(X)\} X - F_0(X) \quad (14)$$

ここで F は外力ベクトル、 K_E , K_G , X , F_0 の意味は(13)式の場合と同様である。この式を解くために

$$X^{(n+1)} = [K_E(X^n) + K_G(X^n)]^{-1} \cdot \{F + F_0(X^n)\} \quad (15)$$

として反復計算を行い、収束値をもって解とした。

4. 数値実験例 一端固定、一端ヒンジの深い円弧アーチの頂点に集中荷重 P が作用する場合の、載荷点に

ける荷重 P と垂直変位 V の関係を計算し、その結果をFig. 2 に示した。解析にあたって、円弧アーチをその弧に沿って10等分割し、それぞれを直線棒にあきかえた。図中にはSchmidtらの解析解および増田・吉田らの結果²⁾を本報告の結果と合わせて示している。数値解析によりこのアーチに対してはA, B 2本の $P-V$ 曲線が得られた。曲線AはSchmidtらの解析解および増田・吉田らの解の前半とそれぞれ求めてある範囲で、良く一致している。Fig. 3 にはFig. 2 中の a_i 点および b_i 点に対応するつり合い形状を示した。これらの形状を比較すれば、曲線Aと曲線Bとは見かけ上交差している位置でも両者の示す解は明らかに異なっていることがわかる。

これらの数値解析から本解析法によれば従来求めることが困難であったと思われる領域までのつり合い経路を容易に求められることが明らかになった。

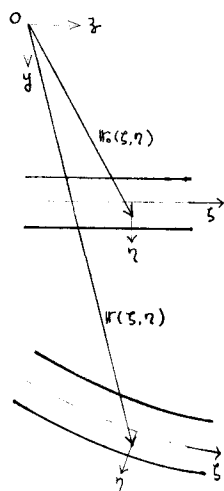


FIG. 1

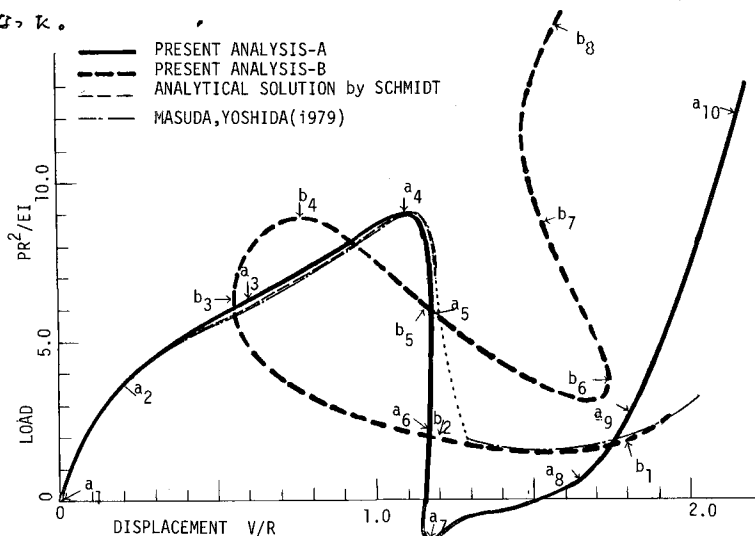
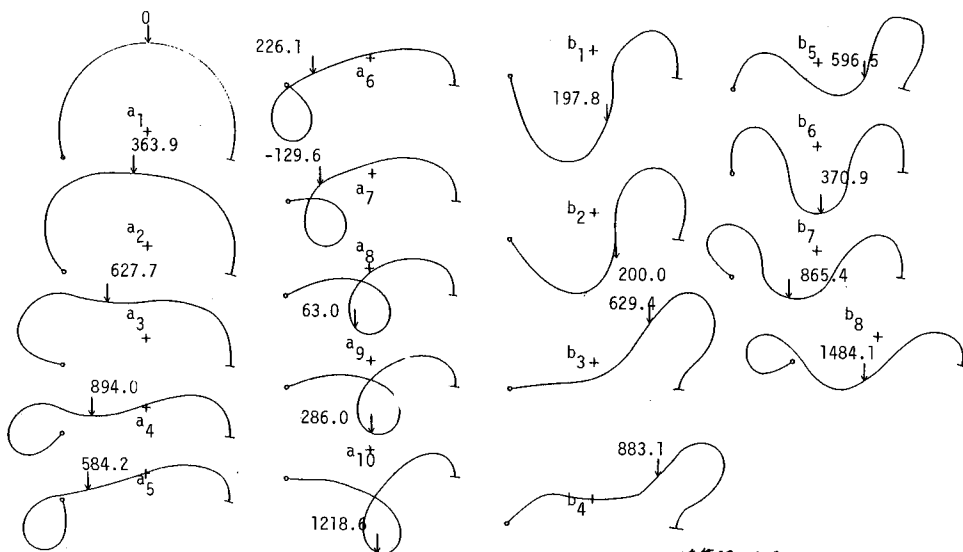


FIG. 2 LOAD-DISPLACEMENT CURVES (VERTICAL COMPONENT) OF DEEP-ARCH



※ 図中の数値は荷重 P である。

FIG. 3 つり合い形状

参考文献 岩能・西野：有限変位問題の数値解析に関する考察，第33回土木学会全国大会講演報告集，I-29, pp.55-56, 1978-9.
増田・吉田・森本：骨組構造の幾何学的非線形問題の定式化とその解法，I-35, pp.69-70, 1979-10.