

大阪大学	学生員	○板本 保彦
大阪大学	正員	小松 定夫
川崎重工業(株)	正員	長井 正嗣

1. まえがき

離散化解析手法として、差分法、有限要素法および境界要素法がその代表的なものとして挙げられる。近年、これらの手法のそれぞれの特長を生かす意味でも両者を混用して解析しようとする試みが活発に実施され始めた。本文では後二者の混用解析を実施した例を報告するものである。その基本的な考え方は、有限要素法における剛性方程式を境界要素法で得られる弾性方程式と同一の形に書き改め直接結合するものである。このような試みは Brebbia の研究にみられるが、数値計算例としては、境界要素上での未知量を一定近似した境界要素法と有限要素法の結合例が示されている。そこで、本文では境界要素に高次要素（未知量を1次以上の関数で近似する）をもちいた解析例を示す。計算例は1次元関数のみに限定したが、より高次の関数近似も容易に取り扱える。

2. 基礎理論

境界要素法の基礎方程式は以下の様に与えられる。²⁾

$$C_{ij}U_j + \int_{\Gamma} P_{ij}^* U_j d\Gamma = \int_{\Gamma} U_j P_{ij} d\Gamma \quad \text{———— (1)}$$

境界を N 個の有限要素（境界要素）に分割し、変位、応力を多項式近似すると、最終的に以下の様な弾性方程式を得る。

$$A U = B \cdot P \quad \text{———— (2)}$$

次に、有限要素法における剛性方程式は以下の様に書ける。

$$K U = F \quad \text{———— (3)}$$

さて、Fig. 1 に示す結合問題を考える。 Ω_1, Ω_2 はそれぞれ境界要素および有限要素領域であり、 Γ_1 は結合境界である。

(3) 式の節点カベクトル F を考えると、

$$F = \int_{\Gamma} \phi^T \cdot p d\Gamma \quad \text{———— (4)}$$

と表わせる。ここで、 ϕ は形状関数のベクトルである。次に

$$p = \psi \cdot P \quad \text{———— (5)}$$

と近似すると、

$$F = \int_{\Gamma} \phi^T \psi d\Gamma \cdot P = C P \quad \text{———— (6)}$$

となり、(3) 式は

$$K U = C P \quad \text{———— (7)}$$

となり、(2) 式と同一の形となる。

今、境界 Γ 上での力のつりあいおよび変位の適合条件を考えると、

$$\left. \begin{aligned} P_{\alpha} &= P_{\alpha}^T = -P_{\alpha}^2 \\ U_{\alpha} &= U_{\alpha}^T = U_{\alpha}^2 \end{aligned} \right\} \quad \text{———— (8.a, b)}$$

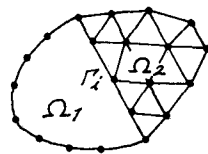


Fig. 1 境界要素と有限要素

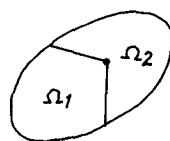


Fig. 2 接合面の不連続

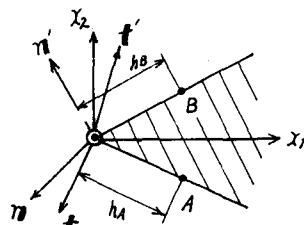


Fig. 3 2重点

なる条件が課せられる。ここで肩付き数字は領域番号を表わす。

式(2), (7)および式(8)の条件より, 最終的に以下の様な混用解析用の基礎方程式を得る。

$$\begin{bmatrix} A' & A_i' & -B_i' & 0 \\ 0 & K_i^2 & C_i^2 & K^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U' \\ U_i \\ P_i \\ U^2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} B' & 0 \\ 0 & C^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P' \\ P^2 \end{Bmatrix} \quad (9)$$

さて, 境界上の未知量を高次関数で近似する場合には固有の問題が生じる。²⁾ 一般に接合面が滑らかな場合には, (7)式の C マトリックスを作成する場合に, (6)式の積分評価を接合面のみで実施すればよい。しかしながら, Fig. 2 に示す様な接合面が滑らかでない場合には, 文献3)に示す様な2重点の考え方を導入しなければならない。その際には新たに以下に示す様な条件を付加する必要がある。(Fig. 3 参照)

$$-N_1 t_1 + N_1 t_1' = N_2 t_2 - N_2 t_2' \quad (10.a)$$

$$\begin{aligned} t_1 \sin \alpha + t_1' \sin \beta - t_2 \cos \alpha - t_2' \cos \beta \\ = -2G/h_A \cdot \cos \alpha U_1(A) + 2G(\cos \alpha/h_A - \cos \beta/h_B) U_1(O) + 2G/h_B \cdot \cos \beta U_1(B) \\ - 2G/h_A \cdot \sin \alpha U_2(A) + 2G(\sin \alpha/h_A - \sin \beta/h_B) U_2(O) + 2G/h_B \cdot \sin \beta U_2(B) \end{aligned} \quad (10.b)$$

ここで, G はせん断弾性係数, t_i は応力, また, $U_1(A)$ は節点Aの" x "方向の変位を意味する。

3. 数値計算例

文献1)で示されたFig. 4のモデルの解析例を紹介する。Fig. 5, 6は有限要素法単独および混用解析モデルで, それぞれ文献1)で与えられているものである。Fig. 7は着目するがもろいた解析モデルで, 有限要素および境界要素ともに1次関数で未知量を近似した。また境界要素法の節点数を22節点とした。(Fig. 6では30節点) Table. 1にその結果を示すが, Case. 1は一樣引張り, Case. 2は横方向荷重 H を付加した結果である。格弧内に文献1)の結果を示すが, 一樣引張りの場合両者にはほとんど差異がみられなかった。他方, 横方向力を付加したCase. 2では今回のモデルが節点数が少なくにもかかわらず文献1)より大きい値を示した。このことより, より高次の関数近似が有利であることが推測される。

参考文献 1) C.A. Brebbia and P. Georgiou; Combination of Boundary and Finite Elements in Elastostatics, Appl. Mech. Modelling, Vol. 3, 1979, 2) 長井・小松・西牧; 境界要素法による2次元連続体の解析方法について, 第25回土木学会年講, 3) Madeleine Chaudonnet; On the Discontinuity of The Stress Vector in The Boundary Integral Equation Method for Elastic Analysis, Recent Advances in Boundary Element Methods, Pentech Press, 1978

Table. 1 解析結果

混用解析		有限要素解		
距離5mmの変位(mm)				
X方向	Y方向	X方向	Y方向	
Case 1				
A	-2.7 (-3.6)	33.1 (33.5)	-3.5	33.4
B	-1.1 (-1.4)	32.9 (30.9)	-1.4	30.9
C	0.0 (0.0)	32.9 (32.7)	0.0	32.6
D	1.1 (1.4)	32.9 (30.9)	1.4	30.9
E	2.1 (3.6)	33.1 (33.5)	3.5	33.4
Case 2				
A	221.9 (211.6)	-59.1 (-58.7)	213.2	-58.6
B	181.1 (182.1)	2.8 (-0.8)	184.7	-0.2
C	172.7 (165.9)	36.2 (36.4)	167.4	36.3
D	167.9 (161.5)	66.3 (62.3)	163.2	62.1
E	162.0 (162.3)	99.5 (97.4)	164.1	97.2

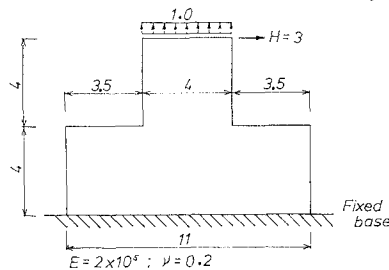


Fig. 4 モデル¹⁾

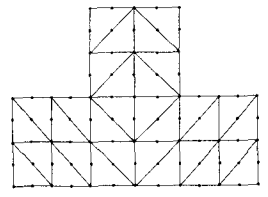


Fig. 5 有限要素解析要素分割¹⁾
【】内の値

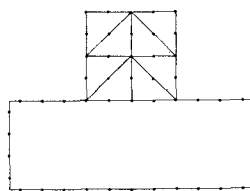


Fig. 6 混用解析モデル¹⁾
()内の値

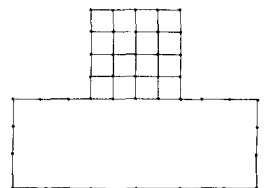


Fig. 7 混用解析モデル(体法)