

川崎重工業(株) 正員 長井 正嗣
 大阪大学 正員 小松 定夫
 大阪大学 学生員 西牧 世博

1. まえがき

領域型の問題を解析する手法として、領域内での場の支配方程式を満足する解をもちいて境界条件(基本および自然条件)を近似的に満足しようとする手法がある。境界要素法(Boundary Element Method)がこの種の手法の1つであり、現在では弾性問題のみでなく動的問題および塑性問題へとその適用範囲も拡張されつつある。この手法は他の代表的手法、差分法および有限要素法に比して、①系の自由度を減少しうる。②データ量が減少できる。③解の精度の向上が期待できる。④無限領域の解析に適している。などの利点を有している。さて、この解法を数値計算という観点からみれば、境界を有限の要素に分割しその区間で力学量を補関関数と持ちいて近似することになる。この様な離散化手法をもちいけばFig. 1に示す有限要素が得られたことになり、最近ではこの要素を通常の有限要素と結合しようとする試みも活発に実施されている。ところで、境界での力学量の近似は従来、取り扱いの簡便さもあって区間内一定近似が多用された。しかしながら、問題によっては極めて多くの節点が必要となり、境界のみの自由度で解析しようとする本法の特長が失われることになり、あわせて他の解法、特に有限要素法との結合において、接合部で変位の非適合が生じるなど不都合である。そこで、境界での力学量を1次以上の補関関数で近似する解析手法をもちいて2次元連続体の解析を実施した。また、その際生じる数値計算上の問題について言及し、あわせて本法の特長を論じることとした。

2. 基礎方程式

弾性問題における本法の基礎方程式は以下の様に与えられる。(空種力無視)

$$C_{ij} u_j + \int_{\Gamma} P_{ij}^* u_j d\Gamma = \int_{\Gamma} U_{ij}^* P_j d\Gamma \quad (1)$$

ここで、 U_{ij}^* , P_{ij}^* は素解と呼ばれるもので、この場合、平面応力状態におけるKelvin解をもちいけばよい。また、 C_{ij} は素解 P_{ij}^* が $\Gamma \rightarrow 0$ で特異種分となすための係数で、Cauchyの主値の意味で理解する必要がある。次に、領域内の変位は(1)式において $C_{ij} = \delta_{ij}$ とおけばよく、応力はそれにフックの法則を適用すればよい。境界上での未知量が求まれば、任意の位置で変位および応力が求まることになる。

3. 散離化解析手法

境界を N コの領域(要素)に分割し、境界上の変位および応力を補関関数 N_1, N_2 をもちいて節点値 U^n, P^n と関係づけると、特定の節点に対して、

$$C^n U^n + \sum_j \left\{ \int_{\Gamma_j} P^* N_1 |J| d\Gamma_j \right\} U^n = \sum_j \left\{ \int_{\Gamma_j} U^* N_2 |J| d\Gamma_j \right\} P^n \quad (2)$$

を得る。ここで、

$$U^n = \begin{bmatrix} U_{11}^* & U_{12}^* \\ U_{21}^* & U_{22}^* \end{bmatrix}, \quad P^n = \begin{bmatrix} P_{11}^* & P_{12}^* \\ P_{21}^* & P_{22}^* \end{bmatrix}$$

であり、例えばFig. 2に示す変位の1次補関を考えると、無次元化した座標系をもちいて、

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2(1-\xi) & 0 & 1/2(1+\xi) & 0 \\ 0 & 1/2(1-\xi) & 0 & 1/2(1+\xi) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{Bmatrix} = N U^n \quad (3)$$

となる。また、 $|J|$ は素解の離散化に関するヤコビアンである。(2)式をすべての節点について適用すると、最終的に以下の様な弾性方程式を得る。

$$A \cdot U = B \cdot P \quad (4)$$

4. 高次要素固有の問題点とその処理

境界上での力学量を1次以上の高次関数で近似すると、Fig. 3に示すように、隅角点で性質の異なる物理量が合成されるような形で表わされるという不都合が生じる。この様な場合にはFig. 4に示す“分離”ないし同一座標で2つの節点を設ける“二重点”を用いることにより性質の異なる物理量が分離される。本法は、この処理を余分な節点で設けずにプログラム上で自動的に処理することとし、有利な“二重点”を主として使用することにした。

5. 数値計算例と考察

Fig. 5に示す斜め支持板の解析例を通じて検討を行う。ここでは、境界力学量を2次関数で近似した。また、Fig. 6に比較計算に使用した有限要素分割図を示す。

1)要素分割—境界応力の滑らかな領域では粗い要素分割、また、乱れる領域で細分割を実施したモデル(Fig. 7, 22節点)で、A点での応力を除けばFEM解とほぼ同一精度が得られることがわかった。

2)境界要素長と応力の収束性—Fig. 8および9に点AおよびBの応力の収束性と要素長の関係を示す。A点では収束状況に乱れが生じている。これは境界線上の応力分布の近似による影響を強く受けるため、この場合でもほとんど同程度に要素分割すれば十分収束した解が得られることがわかった。また、B点ではかなり粗い分割で十分な精度の解が得られることがわかった。

6. まとめ

本文で記述したような数値計算例を通じて得られた結果は、①. 境界応力の滑らかな領域では、かなり粗い分割でも十分な精度の解が得られる。②. 領域内部応力の評価は、その近傍の境界要素長に支配され、離れた境界要素の長さを変化させてもその影響をほとんど受けない。である。また、FEMとの比較では、要素分割に注意を設ければ十分少ない境界節点で同程度の精度が得られることがわかった。一般に2次元問題では、FEMは帯状対称マトリックスとなり、本法の様な非対称正方マトリックスに比較して演算時間の面で有利である。しかしながら、高次要素を導入することにより、少ない自由度でFEMより有利に計算しうることがわかった。

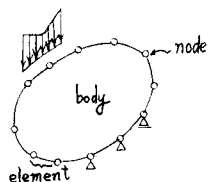


Fig. 1 境界要素分割

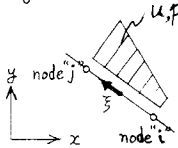


Fig. 2 未知量の線形表示

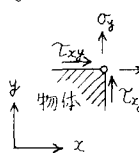


Fig. 3 隅角点での応力

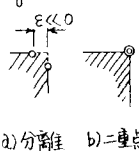


Fig. 4 隅角点処理

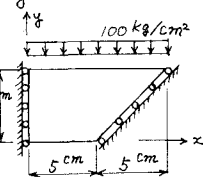


Fig. 5 数値計算モデル

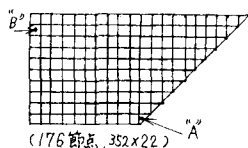


Fig. 6 有限要素分割図

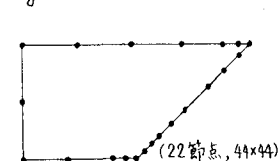


Fig. 7 境界要素分割図

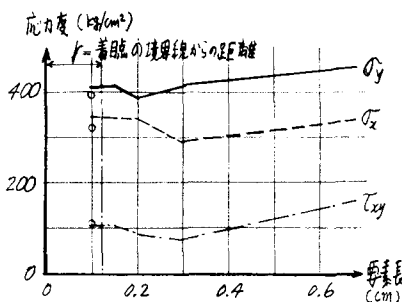


Fig. 8 A点応力の収束性 (○印FEM)

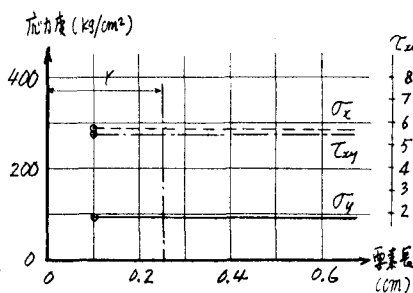


Fig. 9 B点応力の収束性 (○印FEM)