I-13　変断面ばりのべき級数による数値計算の検討

井森工業K.K　正　大内光徳
九州産業大学　正　薄　慶治

1. 序　等断面に比べ変断面ばりの計算は相当面倒である。こゝでは，たわみ曲線の微分方程式において，断面2次モーメントをべき級数で表わし項別積分するという計算を検討したものである。また，これにより基本的な模型実験および計算例を行なって検証してみた。

2. 計算　たわみ曲線の微分方程式 $y''=-M(x)/EI(x)$ において，断面2次モーメントの逆数 $1/I(x)$ をべき級数で表わすとつぎのようである。たゞし，はりの断面の幅Bを一定とし，高さ h_x が $h_x=ax^r+b$ の形で表わされるものとし，$r=2,3,\cdots$，$x=0$ で $h_x=h_o$，$x=\ell$（支間長）で $h_x=h_\ell$，$h_\ell>h_o$ とする。

i)　$x<\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{r}}=\left(\frac{1}{h_\ell/h_o-1}\right)^{\frac{1}{r}}\ell$ の値域について

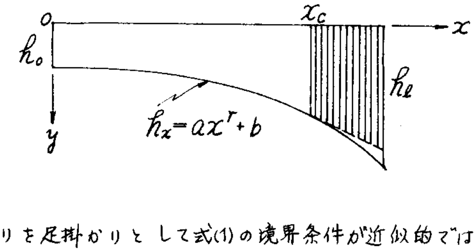
$$\frac{1}{I(x)}=\frac{3}{B}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-3)(-4)\cdots\cdots(-2-n)}{n!}a^n b^{-(3+n)}x^{rn}\cdots\cdots(1)$$

ii)　$x>\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{r}}=\left(\frac{1}{h_\ell/h_o-1}\right)^{\frac{1}{r}}\ell$ の値域について

$$\frac{1}{I(x)}=\frac{3}{B}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-3)(-4)\cdots\cdots(-2-n)}{n!}a^{-(3+n)}b^n x^{-(3+n)r}\cdots\cdots(2)$$

iii)　$x=\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{r}}=\left(\frac{1}{h_\ell/h_o-1}\right)^{\frac{1}{r}}\ell$ の点において　式(1),(2)は発散。$x=x_c$ とする。

すなわち，たわみの式の $1/I(x)$ に式(1)または式(2)を代入し境界条件に合わせて項別積分を行うものとする。この場合，はりの断面の変化を表わす要素 h_ℓ と h_o との関係において，$h_\ell<2h_o$ の場合には式(1)の値域の条件からわかるように全支間 $0\leqq x\leqq\ell$ についてこの式で計算ができることになる。ところが，$h_\ell\geqq 2h_o$ の場合は式(1)の値域が全支間を満足することができず，iii）の場合の $x=x_c$ を不連続な境界として式(1)から式(2)に変更しなければならないことになる。このとき，式の変更に伴ひ x_c においてそれぞれの式の境界条件を求めないと積分定数が求められない。ところで丁度 x_c 点では級数が発散するので，この計算ができないので已むを得ずつぎのように近似計算を行うことゝする。一般に $r=1$ すなわち断面の高さが直線変化する場合にはこのような級数によらずとも直接積分することができるので，$r\geqq 2$ について考慮するものとすれば，右の図のように境界点 x_c において $h_x=ax^r+b$ の接線をもとめ，値域 $x\geqq x_c$ においては，断面の高さが直線変化するはり（図中ハッチングされた部分）と近似するのである。

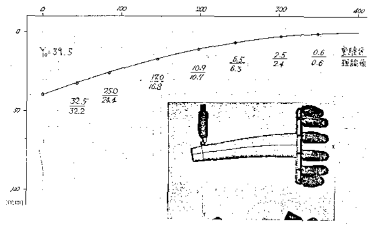
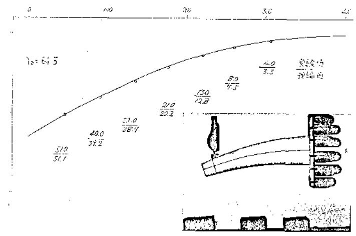
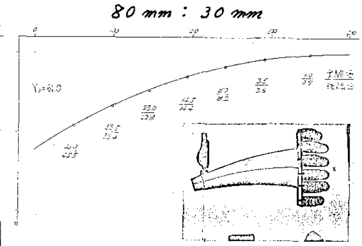


このようにして直線変化するはりを足掛かりとして式(1)の境界条件が近似的ではあるがもとめられる。勿論，この部分の y の計算は式(2)を用いることに変りはない。この場合，次数 r が大きくなればそれだけ境界点 x_c は断面の高さの大きい側に寄ってゆくわけであるから近似の誤差は小さくなることになる。以上のような計算手順により次数 r が1，2および3についてそれぞれ $h_\ell/h_o<2$，$h_\ell/h_o=2$ および $h_\ell/h_o>2$ の条件に該当する模型実験について計算を行い実測値と対照してみたものゝ一部を示めせばつぎのとおりである。

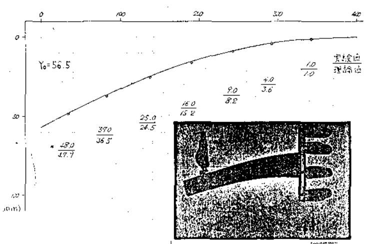
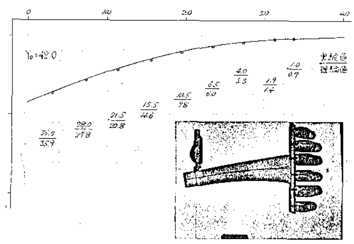
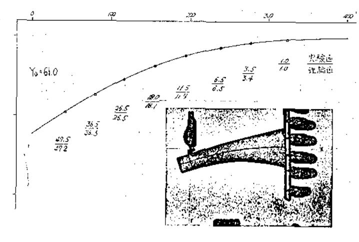
3. 模型実験　厚さ5cmのウレタン板から，$h_1 : h_0 = 50\,mm : 30\,mm$，$60\,mm : 30\,mm$，$80\,mm : 30\,mm$ のそれぞれについて，$h_x = ax + b$，$ax^2 + b$，$ax^3 + b$ の変断面片持ばりの模型を切り出し，机上で（重力に直交）自由端に任意たわみを与えたときのたわみ曲線の実測値と計算値を示めせばつぎの各図のとおりである。

$h_x = ax + b$

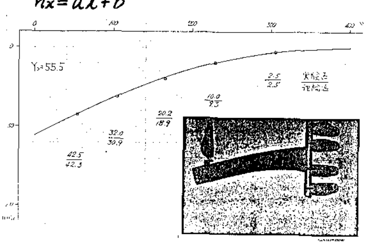
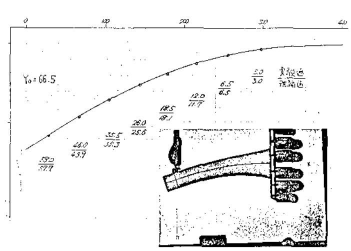
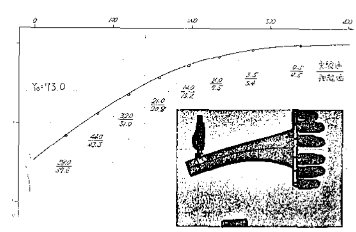
$h_1 : h_0 = 50\,mm : 30\,mm$　　　$60\,mm : 30\,mm$　　　$80\,mm : 30\,mm$

$h_x = ax^2 + b$

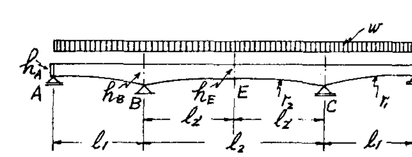




$h_x = ax^3 + b$

各図からわかるように良好な結果がえられている。

4. 計算例　右の図のような3径間連続変断面げたを例にとり断面BおよびEの曲げモーメントを計算するとつぎのようになる。計算条件：$l_1 = 10\,m$，$l_2 = 10\,m$，$h_A : h_B : h_E = 1 : 1.5 : 1$，$w = 1\,t/m$　結果：$M_B = -33.934\,(-33.936)$，$M_E = 16.066\,(16.064)$　ただし（　）は別解※によるもの



5. 結　以上のようにべき級数で取り扱うことにより一般項を記憶させるだけで済み，また，精度も項数の取捨により自動的に調整できるので卓上電算機で効率的に計算することができる。　ただ，問題点として x_c において級数が発散するので已むを得ず近似の手順を挿入しなければならないことである。

※幕田貞夫著　たわみ角法による変断面構造の解法　理工図書