

北見工業大学 正員 三宅 和子
北見工業大学 正員 奥村 勇

1. まえがき 近年、円柱の非軸対称問題に関する研究は数多く見受けられるようになったが、円筒の非軸対称問題についての研究はあまり見受けられないようである。本研究は、短円筒の非軸対称問題を解析する前段階として、長円筒の内外側面に部分的圧力を受ける非軸対称問題を解析したものである。両端面自由の円筒を対象に考えると、短円筒の場合には両端面における境界条件をすべて応力成分によって規定しなければならないが、長円筒の場合には直応力に関する境界条件は合応力によって規定することができ、短円筒に比較して解法ははるかに容易になる。この境界条件のひとつを合応力によって規定することは Saint-Venant の原理に基づいており、両端面を十分に離れた位置における変位および応力成分には影響を与えないことが保障されている。

2. つり合い方程式の解と変位ポテンシャル 物体力が0の場合の弾性体のつり合い方程式の解として拡張された Neuber の解を用いると変位ベクトルを次のように表わすことができる。

$$2G\mathbf{U} = -\text{grad}(\Phi_0 + \mathbf{V}\Phi) + 4(1-\nu)\Phi + 2\nabla\text{rot}\mathbf{U} \quad \text{--- (1)}$$

ここで、 $\mathbf{U} = (U_r, U_\theta, U_z)$, $\mathbf{r} = (r, \theta, z)$, $\Phi = (\Phi_r, \Phi_\theta, \Phi_z)$,

$$\mathbf{U} = (0, 0, U_z), \nabla\Phi_0 = 0, \nabla\Phi_z = 0, \nabla^2\Phi = 0$$

また、 G, ν はそれぞれせん断弾性係数およびポアソン比を表わし、 ∇^2 は円筒座標系におけるラプラス演算子である。

式(1)より変位ポテンシャル $\mathbf{V}$ を求めると次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \Phi_r &= -\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \cos m\theta \cos \beta_n z \{ D_{mn}^{(1)} I_m(\beta_n r) + D_{mn}^{(2)} K_m(\beta_n r) \} \\ \Phi_r &= -\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (\beta_n/2) \cos m\theta \cos \beta_n z \{ F_{mn}^{(1)} I_{m-1}(\beta_n r) + F_{mn}^{(2)} I_{m+1}(\beta_n r) \\ &\quad + E_{mn}^{(1)} K_{m-1}(\beta_n r) + E_{mn}^{(2)} K_{m+1}(\beta_n r) \} + A_{00}r + B_{00}/r \\ \Phi_\theta &= -\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (\beta_n/2) \sin m\theta \cos \beta_n z \{ -F_{mn}^{(1)} I_{m-1}(\beta_n r) + F_{mn}^{(2)} I_{m+1}(\beta_n r) \\ &\quad - E_{mn}^{(1)} K_{m-1}(\beta_n r) + E_{mn}^{(2)} K_{m+1}(\beta_n r) \} \\ \Phi_r^0 &= \sum_{m=1}^{\infty} \cos m\theta \{ D_{m0}^{(1)} r^{m-1} + D_{m0}^{(2)} r^{-m-1} \}, \Phi_\theta^0 = \sum_{m=1}^{\infty} \cos m\theta \{ F_{m0} r^{m+1} + E_{m0} r^{-m+1} \}, \\ \Phi_\theta^0 &= \sum_{m=1}^{\infty} \sin m\theta \{ F_{m0} r^{m+1} - E_{m0} r^{-m+1} \} \quad \text{--- (2)} \\ \Phi_z &= C_{00}z, \Phi_{0z} = U_z = 0 \quad \text{--- (3)} \\ \Phi_z &= C_{00}z, \Phi_{0z} = U_z = 0 \quad \text{--- (4)} \end{aligned} \right\}$$

ここで、 $D_{mn}^{(1)}, D_{mn}^{(2)}, \dots, C_{00}$ は境界条件によって決定される未知定数である。

3. 変位および応力成分 変位成分は、式(2)、(3)および式(4)の変位ポテンシャル $\mathbf{V}$ を式(1)に代入して得られ、応力成分は応力とひずみの関係より求められる。一例として、 U_r および σ_{rr} について示すと次のようになる。

$$2G U_r = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (\beta_n/2) \cos m\theta \cos \beta_n z \{ 2D_{mn}^{(1)} \{ m I_m(\beta_n r) / \beta_n r + I_{m+1}(\beta_n r) \} + F_{mn}^{(1)} \{ I_m(\beta_n r) [\beta_n r + 2m(m-4+4\nu) / \beta_n r] + (m-4+4\nu) I_{m+1}(\beta_n r) \} + F_{mn}^{(2)} \{ \beta_n r I_m(\beta_n r) - (m+4-4\nu) I_{m+1}(\beta_n r) \} + 2D_{mn}^{(2)} \{ m \times K_m(\beta_n r) / \beta_n r - K_{m+1}(\beta_n r) \} - E_{mn}^{(1)} \{ K_m(\beta_n r) [\beta_n r + 2m(m-4+4\nu) / \beta_n r] - (m-4+4\nu) K_{m+1}(\beta_n r) \} - E_{mn}^{(2)} \{ \beta_n r K_m(\beta_n r) + (m+4-4\nu) K_{m+1}(\beta_n r) \} \} + 2(1-2\nu) A_{00}r + 4(1-\nu) B_{00}/r \quad \text{--- (5)}$$

$$2G U_r^0 = \sum_{m=1}^{\infty} \cos m\theta \{ -m D_{m0}^{(1)} r^{m-1} + m D_{m0}^{(2)} r^{-m-1} - (m-2+4\nu) F_{m0} r^{m+1} + (m+2-4\nu) E_{m0} r^{-m+1} \} \quad \text{--- (6)}$$

$$\sigma_{rr} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (\beta_n^2/2) \cos m\theta \cos \beta_n z \{ 2D_{mn}^{(1)} \{ I_m(\beta_n r) \{ m(m-1) / (\beta_n r)^2 + 1 \} - I_{m+1}(\beta_n r) / \beta_n r \} + F_{mn}^{(1)} \{ I_m(\beta_n r) \times \{ 2m-3+2\nu+2m(m-1)(m-4+4\nu) / (\beta_n r)^2 \} + I_{m+1}(\beta_n r) \{ (m-1)(m-4+4\nu) / \beta_n r + \beta_n r \} \} - F_{mn}^{(2)} \{ (3-2\nu) \times I_m(\beta_n r) - I_{m+1}(\beta_n r) \} (m+1)(m+4-4\nu) / \beta_n r + \beta_n r \} \} + 2D_{mn}^{(2)} \{ K_m(\beta_n r) \{ m(m-1) / (\beta_n r)^2 + 1 \} + K_{m+1}(\beta_n r) / \beta_n r \} \}$$

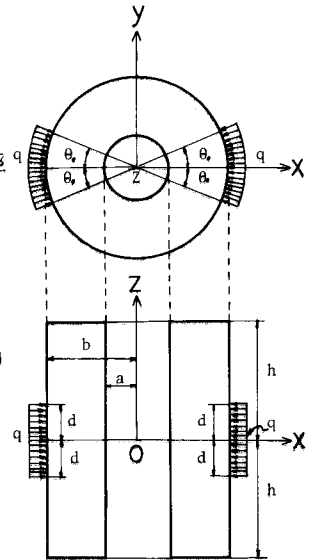


図-1 長円筒

$$-E_{mn}^{(1)} \{ K_m(\beta_n r) \{ 2m-3+2\nu+2m(m-1)(m-4+4\nu)/(\beta_n r)^2 - K_{m+1}(\beta_n r) \{ (m-1)(m-4+4\nu)/\beta_n r + \beta_n r \} \} \\ + E_{mn}^{(2)} \{ (3-2\nu) \{ K_m(\beta_n r) + K_{m+1}(\beta_n r) \} (m+1)(m+4-4\nu)/\beta_n r + \beta_n r \} \} + 2A_{00} - 4(1-\nu)B_{00}/r^2 + 2\nu C_{00} \dots (7) \\ \tau_{rr}^0 = -\frac{1}{2m} \cos m\theta \{ m(m-1) D_{m0}^{(1)} r^{m-2} + m(m+1) D_{m0}^{(2)} r^{-m-2} + (m+1)(m-2) F_{m0} r^m + (m-1)(m+2) E_{m0} r^{-m} \} \dots (8)$$

4. 境界条件 図-1に示すような外側に部分的圧力を受ける長円筒の境界条件は次のようである。

$$r=a \text{ において } \tau_{rz}=0, \tau_{r\theta}=0, \sigma_{rr}=0, \quad r=b \text{ において } \tau_{rz}=0, \tau_{r\theta}=0, \sigma_{rr}=-P(\theta, z) \dots (9) \\ z=\pm h \text{ において } \tau_{rz}=0, \tau_{r\theta}=0, \tau_{zz}=0$$

ここで、

$$P(\theta, z) = \begin{cases} \begin{cases} 0 & 0 < \theta < \theta_0, \pi - \theta_0 < \theta < \pi + \theta_0, \\ 2\pi - \theta_0 < \theta < 2\pi \text{ かつ } -d < z < d \end{cases} \\ 0 \quad \text{[上記以外の領域]} \end{cases}, \quad \tau_{zz} = \int_0^{2\pi} \int_a^b \tau_{zz} r dr d\theta$$

また、 $P(\theta, z)$ を Fourier 級数に展開すると次式となる。

$$P(\theta, z) = P_{00} + \sum_{m=2}^{\infty} P_{m0} \cos m\theta + \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} P_{mn} \cos m\theta \cos \beta_n z$$

ここで、 $P_{00} = 2\theta_0 d / \pi h$, $P_{m0} = 4\theta_0 d \sin m\theta_0 / m\pi h$,

$$P_{mn} = 4\theta_0 d \sin \beta_n d / \pi \beta_n h + 8\tilde{J}_m \int_0^d \sin m\theta \times \sin \beta_n d / m\pi \beta_n h$$

$$\text{さらに、} \tilde{J}_m = \begin{cases} 1 & [m=0] \\ 0 & [m \geq 1] \end{cases}, \quad \tilde{J}_m = \begin{cases} 0 & [m=0] \\ 1 & [m \geq 1] \end{cases}$$

m : 偶数

5. 4元の連立1次方程式 τ_{rz} についての境界

条件より、 $D_{mn}^{(1)}$ および $D_{mn}^{(2)}$ を消去でき、さらに $\sigma_{r\theta}$ および $\tau_{r\theta}$ の条件より2組の4元連立1次方程式と3元連立1次方程式が得られる。

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_{mn}^{(1)} \\ F_{mn}^{(2)} \\ E_{mn}^{(1)} \\ E_{mn}^{(2)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -P_{mn} \end{Bmatrix} \dots (10)$$

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} D_{m0}^{(1)} \\ D_{m0}^{(2)} \\ F_{m0} \\ E_{m0} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -P_{m0} \end{Bmatrix} \dots (11)$$

3元連立1次方程式を解くと次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} A_{00} &= (V-1)P_{00} / \{ 2(2V-1)(V+1)(\alpha^2/b^2-1) \} \\ B_{00} &= -\alpha^2 P_{00} / \{ 4(V-1)(\alpha^2/b^2-1) \} \\ C_{00} &= V P_{00} / \{ (2V-1)(V+1)(\alpha^2/b^2-1) \} \end{aligned} \right\} \dots (12)$$

6. 数値計算例 計算例として $b/a=4.0$, $(b-a)/h=0.5$ および $V=0.25$ の長円筒で $d/h=0.2$, $\theta_0=\pi/8$ とした場合の τ_{rr} および $\sigma_{\theta\theta}$ をそれぞれ図-2 および図-3に示した。図-3に示された $\sigma_{\theta\theta}$ が $\theta=0$ における内側近傍において、軸対称問題と異なり引張応力となるのは、興味深いことである。

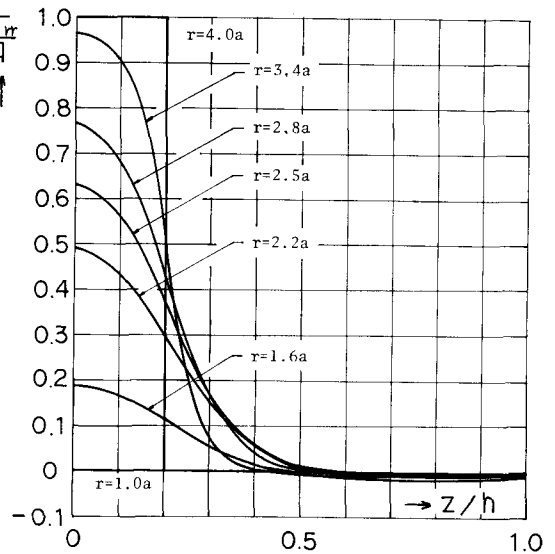


図-2 $\theta=0$ における τ_{rr} の分布

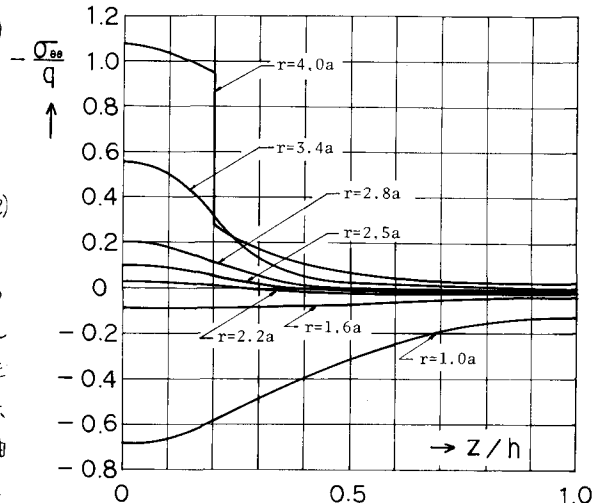


図-3 $\theta=0$ における $\sigma_{\theta\theta}$ の分布