

後知保

正員

佐寺真人

京都大学工学部

正員

小林昭一

京都大学工学部

正員

西村直志

## 1 序

近年積分方程式法を用いた解析が数多く行なわれるようになり、高精度化に関する研究も見られる。本研究はアイソパラメトリック要素を用いる事により、外部問題の解析精度を向上させる試みを行ない、境界応力の算定法について若干の検討を加えたものである。

## 2 Green 公式による外部積分方程式の数値解析法

3次元外部領域  $D$  を考える。静弾性学に於ける外部 Green 公式の内部表示 ( $x \in \bar{D}$ )

$$0 = \int_{\partial D} \Gamma_{ij}(x, y) u_j(y) ds - \int_{\partial D} \Gamma_{ij}(x, y) t_j(y) ds, \quad \Gamma: \text{基本解}, \Gamma_{\pm}: \text{二重層の核}, u: \text{変位}, t: \text{表面力} \quad (1)$$

に於いて  $x \rightarrow \partial D$  とすると、積分方程式

$$C_{ij}(x) u_j(x) + \int_{\partial D} \Gamma_{ij}(x, y) u_j(y) ds = \int_{\partial D} \Gamma_{ij}(x, y) t_j(y) ds \quad (2)$$

を得る。ここに  $C_{ij}$  は二重層ポテンシャルの内部極限の非積分項の係数であり、 $x$  が  $\partial D$  の滑らかな部分にあれば  $-\delta_{ij}/2$  となる。

次に積分方程式 (2) を解くために、アイソパラメトリック近似を行なうと

$$C_{ij}(x) u_j(x) + \sum_{m=1}^N \sum_{c=1}^n \int_S \Gamma_{ij}(x, \sum_{d=1}^n M^d(s) y^{d(m)}) M^c(s) J(s) ds u_j^{c(n)} = \sum_{m=1}^N \sum_{c=1}^n \int_S \Gamma_{ij}(x, \sum_{d=1}^n M^d(s) y^{d(m)}) M^c(s) J(s) ds t_j^{c(n)} \quad (3)$$

を得る ( $M^d$ :  $s$  番目の節点上で 1 の形状関数,  $N$ : 要素数,  $n$ : 1 要素中の節点数,  $S = [-1, 1] \times [-1, 1]$ ,  $J$ : 面積素) が,  $x$  を節点に選んで節点法を用いるために必要な積分のうち

$$\int_S \Gamma_{ij}(y^{c(n)}, \sum_{d=1}^n M^d(s) y^{d(m)}) M^c(s) J(s) ds \quad (4)$$

の形の項が可積分でなくなる。しかし、内部 Green 公式の内部極限から得られる公式

$$\delta_{ij} = -C_{ij}(x) - \int_{\partial D} \Gamma_{ij}(x, y) ds \quad (5)$$

を用いると、ある節点で 1 となる形状関数 ( $M^{(k)}$ ) と 0 となる形状関数の組 ( $M^{(n_k)}$ ) に対して

$$C_{ij} + \sum_{(k)} \int_{\partial D} \Gamma_{ij} M^{(k)} ds = -(\delta_{ij} + \sum_{(n_k)} \int_{\partial D} \Gamma_{ij} M^{(n_k)} ds) \quad (6)$$

を得るので、式 (3) から得られる代数方程式は全て可積分な量で構成し得る事になる。

## 3 表面応力の算定

外部表面応力表示式として、滑らかな  $\partial D$  に対しては

$$t_j/2 = \int_{\partial D} D_{ijk}(u_k - u_k^0) ds - \int_{\partial D} S_{ijk} tr \epsilon ds \quad (7)$$

ここで  $t$ : 表面応力,  $D, S$ :  $\Gamma_{\pm}, \Gamma$  に対応する応力

が解られる。また、式⑥を解けば、アイソパラメトリック要素のパラメータ  $\xi, \eta, \zeta$  上に取、曲線座標と考える事に、 $\xi, \eta, \zeta$  上の  $u$  を変微分する事ができ、表面応力の成分は

$$\tau_{\alpha\beta} = \lambda a_{\alpha\beta} \frac{2\mu u_{,\alpha} a_{\beta}^{\alpha} + t_3}{\lambda + 2\mu} + \mu (u_{,\alpha\beta} - u_{\beta,\alpha}), \quad \tau_{\alpha 3} = t_{\alpha}, \quad \tau_{33} = t_3 \quad (8)$$

$$u_{,\alpha\beta} = u_{\alpha,\beta} - u_r \Gamma_{\alpha\beta}^r - u_3 b_{\alpha\beta} \quad (9)$$

と求まる。ここに  $a_{\alpha\beta}$  はアイソパラメトリック要素の作る曲面計量であり、3方向は曲面の法線方向へ取っている。また  $\Gamma_{\alpha\beta}^r$ ,  $b_{\alpha\beta}$  は各々  $a_{\alpha\beta}$  から求まる Christoffel 記号及び曲面の第2基本形式である。一般の座標系へは座標変換で戻す。なお  $\Gamma_{\alpha\beta}^r$ ,  $b_{\alpha\beta}$  の形から、 $M^c$  としては最低2次の関数とせばねばならない事が容易に理解される。

#### 4 数値解析例

以下では2次の8点(矩形)アイソパラメトリック要素を用いた数値解析例を示す。材料係数は  $E = 8 \times 10^5 \text{ kg/cm}^2$ ,  $\nu = 0.2$  として、一様な内圧、及至は無限遠方から一様引張( $x_1$  軸方向)を受ける球殻(半径5cm)の問題を解析した。図1に使用したモデルを示す。表1は一様な内圧 ( $10 \text{ kg/cm}^2$ ) を受けた時の  $\tau_{rr}$  の解析結果を示す。要素

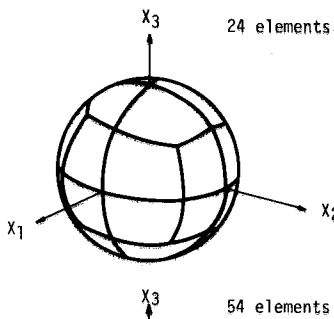


図1: 使用したモデル

| r   | 解析解    | 24 要素      |             | 54 要素      |             |
|-----|--------|------------|-------------|------------|-------------|
|     |        | 積分点25      | 積分点9        | 25         | 9           |
| 5.6 | -7.118 | -12.02     | 3.532       | -10.42     | -16.07      |
| 6   | -5.787 | -6.116 (6) | -6.902 (19) | -5.839 (1) | -6.683 (16) |
| 7   | -3.644 | -3.553 (3) | -4.205 (15) | -3.634 (3) | -3.544 (3)  |
| 8   | -2.441 | -2.387 (2) | -2.456 (1)  | -2.432 (4) | -2.412 (1)  |
| 10  | -1.250 | -1.219 (2) | -1.215 (3)  | -1.244 (5) | -1.241 (1)  |

表1: 内圧を受けた時の  $\tau_{rr}$ .  $P=10$ , ( ) 内は相対誤差

数、積分点数(Gauss積分使用)の増加に従って精度が向上するが、境界近傍ではかなり乱れる事がわかる。一方、ここで述べた方法によれば、かなり安定した精度で境界応力を求める事ができる。表2には、無限遠方から一軸的に  $\tau_{11}^{\infty} = 10 \text{ kg/cm}^2$  を受けた時の各々(5, 0, 0)に於ける  $\tau_{22}$ , (0, 5, 0)に於ける  $\tau_{11}$  及び  $\tau_{33}$  を示した。これより、式⑧を用いる方法が式⑨を用いる方法より有効である事がわかる。この間の事情は模式図

(図2)より明白であらう。

|     |      | $\tau_{22}(5, 0, 0)$ | $\tau_{11}(0, 5, 0)$ | $\tau_{33}(0, 5, 0)$ |
|-----|------|----------------------|----------------------|----------------------|
| 解析解 |      | -5                   | 20                   | 0                    |
| 式   | 24要素 | -5.857 (17)          | 20.55 (3)            | 0.167                |
| ⑦   | 54 " | -5.168 (3)           | 20.06 (3)            | 0.013                |
| 式   | 24 " | -4.845 (3)           | 19.75 (1)            | -0.048               |
| ⑧   | 54 " | -4.912 (2)           | 19.89 (1)            | -0.015               |

表2: 一軸引張を受ける時の応力。( ) 内は相対誤差

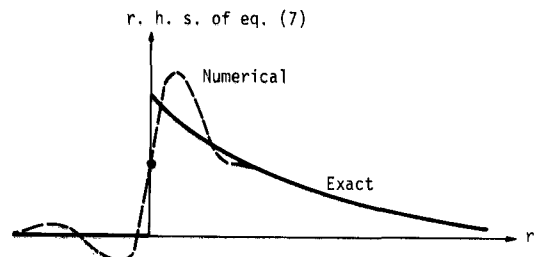


図2: 応力の算定

1) Lachat, J.C. & J.O. Watson; Int. J. Num. Meth. Eng., 10, PP991-1005, 1976.