

京都大学 学生員 〇丸岡 剛

京都大学 正員 小林 昭一

京都大学 正員 西村 直志

1. はじめに

最近、種々の境界値・初期値問題の数値解析手法として、積分方程式法が注目を集めている。今回は、基本的問題として、この方法を異方性弾性体に適用し、応力・変位解析を試みた。まず三次元機等方性弾性体の基本解を Fourier 変換により求めた。これを一重層ポテンシャル法により、積分方程式に定式化し、種々の問題に適用した。以下その概略を示す。

2. 基本方程式と基本解

直交直線座標、テンソル表示を用いると三次元機等方性弾性体の応力・歪関係は、以下の如く表しうる。

$$\begin{cases} \tau_{\alpha\beta} = ((C_{11} - 2C_{66})u_{\alpha,\alpha} + C_{13}u_{3,3})\delta_{\alpha\beta} + C_{66}(u_{\alpha,\beta} + u_{\beta,\alpha}) \\ \tau_{3\alpha} = \tau_{\alpha 3} = C_{44}(u_{3,\alpha} + u_{\alpha,3}) \\ \tau_{33} = C_{13}u_{\alpha,\alpha} + C_{33}u_{3,3} \end{cases} \quad (1)$$

ここで α, β は 1 または 2 を示す。また繰り返される添え字は総和規約に従う。なお、 C_{ij} は 5 種類存在する弾性定数であり、 $u_{\alpha,\beta}$ は α 方向の変位の β による偏微分を示す。

この(1)式を物体力の存在しない場でのつり合い式 $\tau_{ij,j} = 0$ に代入する。そのつり合い式を Δ^* とすると、基本解 Γ は以下の関係式を満足する。(δ ; ディラックのデルタ)

$$\Delta^* \Gamma = -\delta \quad (2)$$

この両辺を Fourier 変換すると以下の式を得る。ただし i は虚数単位、 $\mathcal{F}()$ は Fourier 変換を示す。

$$\mathcal{F}(\Gamma) = -\Delta^{*-1}(i\xi) \quad (3)$$

(3)式を ξ_3 で逆変換し、さらに ξ_1, ξ_2 に関し、逆変換を行なうと基本解 Γ を得る。

$$\Gamma = \frac{1}{4\pi} \left[\begin{aligned} & \frac{1}{C_{66}} \left(\frac{1}{R_i R_i^*} + \frac{\alpha_i \alpha_i}{R_i (R_i^*)^2} \right) + \sum_{i=2}^3 \frac{K_i}{C_{44}} \left(\frac{\delta_{\alpha\beta}}{R_i} - \frac{\alpha_i \alpha_\beta}{R_i (R_i^*)^2} \right) & \sum_{i=2}^3 \frac{L_i \alpha_\alpha \text{Sign}(\alpha_3)}{C_{44} R_i R_i^*} \\ & \sum_{i=2}^3 \frac{L_i \alpha_\beta \text{Sign}(\alpha_3)}{C_{44} R_i R_i^*} & \sum_{i=2}^3 \frac{M_i}{C_{44} R_i} \end{aligned} \right]$$

$$R_i = \sqrt{\alpha_i \alpha_i + |\alpha_3|^2}, \quad R_i^* = R_i + |\alpha_3| \quad 1 \leq i \leq 3$$

$$K_2 = \frac{\alpha_2 C_{44} - C_{33}}{C_{11}(\alpha_2 - \alpha_3)}, \quad L_2 = \frac{(C_{13} + C_{44})\alpha_2}{C_{11}(\alpha_2 - \alpha_3)}, \quad M_2 = \frac{C_{11}\alpha_2 - C_{44}}{C_{11}(\alpha_2 - \alpha_3)}$$

K_3, L_3, M_3 については、各々 α_2 と α_3 を入れ替えて得る。また $\alpha_1 = \cancel{C_{44}/C_{66}}$ であり、

α_2, α_3 は以下の 2 次方程式の根である。

$$\alpha^2 + \frac{C_{44}^2 + C_{11}C_{33} - (C_{13} + C_{44})^2}{C_{11} \cdot C_{44}} \alpha + \frac{C_{33}}{C_{11}} = 0$$

3. 定式化と解の検討

今回、定式化に際しては、一重層ポテンシャル法を用い、外部境界値問題を扱った。滑らかな境界 C に分布する密度を φ とすると、内部点では変位 u は以下のよう表現できる。

$$u = \int_C \Gamma \cdot \varphi \, dS \quad (4)$$

この(4)式より(1)式の応力・歪関係式をもとに応力を求める事ができる。この変位・応力を境界上で定義する。

その場合、一重層ポテンシャルは境界の内外で連続であるが、一重層による応力ベクトルは境界の内外で不連続となるため、境界上では、ポテンシャル論によると以下の関係式が成立する。

$$\tau \cdot n = \frac{1}{2} \varphi + \int_C G \cdot \Gamma \cdot \varphi \cdot n \, dS \quad (5)$$

ここで G は変位を応力に変換する微分作用子とする。 n は境界上での法線ベクトルを示す。

(5)式に基づきプログラムを作成し解の検討を加えた。計算に際しては、密度 φ は要素上で一定とし、積分はガウス積分を使用し、要素は三角形要素とした。まず基本解を用い、点 $(2, 2, 2)$ に大きさ P の力が働いたときの基本解による応力を解析解とした。そして Fig. A に示す境界を考え、前述の力が働いた時の境界上での Traction を計算する。この値を(5)式の左辺に代入し、境界上に分布する密度 φ を求める。この φ をもとに、各点での応力を計算し前述の解析解と比較検討をした。点 $(2, 2, 2)$ での応力を検討したのが Fig. B である。この場合、弾性定数としては、 X_3 方向 (異方性主軸) に関する C_{13}, C_{44}, C_{33} を等方性弾性体のそれと比べ、半分の値を与えた。

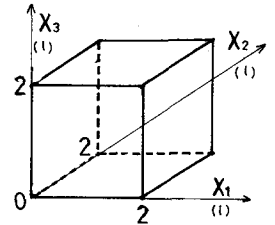


Fig. A

$C_{11} \dots 20.0, C_{66} \dots 5.0, C_{13} \dots 5.0$

$C_{44} \dots 2.5, C_{33} \dots 10.0, (P/q^2)$

さらに精度の向上を検討した計算結果については、当日発表する予定である。

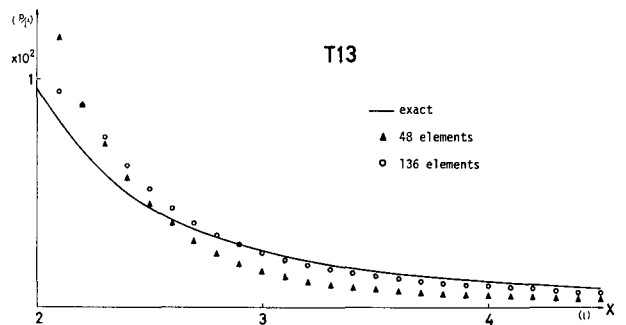


Fig. B

4. トンネル切羽周辺での応力・変位解析

半径 R のトンネルに一様圧縮応力 P が働いたときの切羽周辺での応力・変位を計算したのが Fig. C である。異方性主軸 X_3 をトンネル断面より 20° 傾け、弾性定数は、

$C_{11} \dots 80.0, C_{66} \dots 30.0, C_{13} \dots 10.0$

$C_{44} \dots 15.0, C_{33} \dots 40.0, (P)$

とし、前述の解析の場合と同様、 X_3 方向に関する弾性定数の値を等方性と比べ、半分とした。なお、応力・変位に波打つ現象が見られるが、これは要素の特性と考えられる。現段階においては、定性的には満足できる結果であろう。なお、当日は、紙面の都合上発表できなかった。他の条件下での計算結果を発表する予定である。

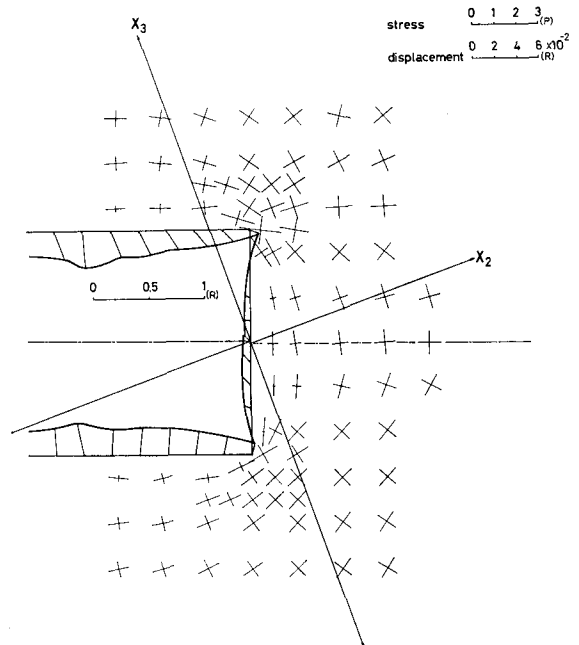


Fig. C