

# I-5 積分方程式法による固有値問題の解析について

京都大学工学部 正員 北原道弘  
京都大学工学部 正員 丹羽義次  
京都大学工学部 正員 小林昭一

## [1] はじめに

弾性体の固有値問題を積分方程式法により解く方法およびこの方法による固有値解析の特徴が明らかにされつつあり、ある種の積分方程式を用いた場合の固有値解析の精度はかなりよいことがわがっている。単に積分方程式といっても定式化によりさまざまな積分方程式が構成されるわけであって、各種積分方程式による固有値の精度および固有密度、固有モードの精度を統一的に確認しておくことが必要と思われる。本報告では平面弾性問題を例にとり、境界条件として変位、応力、混合条件を考え、定式化として Green, Layer 表示を用いてオ一種、オ二種および混合問題の積分方程式を構成し、面外(out of plane)振動問題について、固有値、固有密度、固有モードの精度を検討し、最後に面内(in plane)振動問題の固有値、固有密度、固有モードの解析例を示す。

[2] 基本解 2次元定常弾性問題の基本解は次のようになる。(k<sub>r</sub>=k<sub>r</sub>, k<sub>i</sub>=k<sub>i</sub> は横波、縦波の波数)

面内振動問題 :  $U = \frac{1}{4\pi} [H_0^{(0)}(k_r r) + \frac{1}{2} H_0^{(2)}(k_r r) - H_0^{(0)}(k_i r)]$  面外振動問題 :  $U = \frac{1}{4\pi} H_0^{(0)}(k_r r)$

[3] 積分方程式 各種定式化による固有値の精度を検討するために、次のような積分方程式を考える。

(A) オ一種(変位)問題 (F.I.)

(B) オ二種(応力)問題 (S.I.)

(i)  $SD = 0$  (F.I.(G), F.E.(G))

(i)  $D_n U = 0$  (S.I.(G), S.E.(G))

(ii)  $(\frac{1}{2}I - K)U = 0$  (F.I.(G), S.E.(L))

(ii)  $(\frac{1}{2}I + \bar{K}^*)U = 0$  (S.I.(G), F.E.(L))

(iii)  $(\frac{1}{2}I - \bar{K}^*)U = 0$  (F.I.(L), S.E.(G))

(iii)  $(\frac{1}{2}I + K)U = 0$  (S.I.(L), F.E.(G))

(C) オ三種(混合)問題 (M.I.)

(i)  $\begin{cases} (SD)_{\partial D_n}^{(x)} - (K^*U)_{\partial D_n}^{(x)} = 0 \\ (SD)_{\partial D_n}^{(x)} - (\frac{1}{2}I + \bar{K}^*)U_{\partial D_n}^{(x)} = 0 \end{cases} x \in \partial D_n \dots (M.I.(G) : \partial D_n \text{ 変位表示式を用いた場合})$

(ii)  $\begin{cases} (SD)_{\partial D_n}^{(x)} - (K^*U)_{\partial D_n}^{(x)} = 0 \\ (K)_{\partial D_n}^{(x)} - (D_n U)_{\partial D_n}^{(x)} = 0 \end{cases} x \in \partial D_n \dots (M.I.(G) : \partial D_n \text{ 変位表示式を用いた場合})$

上に示した積分作用素は SD : 1重層, K : 1重層の微分, K\* : 2重層, D<sub>n</sub> : 2重層の微分に対応している。

[4] 各種積分方程式による固有値の精度について Table 1 は面外振動問題について、正方形、オ一種問題の固有値を上に示した3つの積分方程式により求めたものである。各欄のオ1、オ2、オ3列はそれぞれ積分核 SD, K, K\* を持つ積分方程式により求めた固有値(和)および相対誤差(e)をパーセントで示している。Table 2 は積分核 D<sub>n</sub>, -K\*, -K を持つ積分方程式により求めた固有値の精度を示している。Table 3 は長方形、オ三種問題の固有値を Green 積分表示により求めたものであり、各欄のオ1、オ2列はそれぞれ、(C-i), (C-ii)の方法により求めた固有値および相対誤差を示している。これらの結果からわかるように、オ二種問題の D<sub>n</sub> 積分核による結果を除いては、どの積分方程式を用いても、得られし結果は1%以内の相対誤差内にあり、Table 4 は一応用例として直角三角形(斜辺:仮)の斜辺の面外変位を固定したオ二種問題の固有値と(C-i)の方法に

Table 1 Eigenvalues of the first problem (square(a<sub>0</sub>=0), N=28, Δk<sub>T</sub>=0.1, 8-point Gauss)

| m \ n | 1                                         | 2                                                      | 3                                          |
|-------|-------------------------------------------|--------------------------------------------------------|--------------------------------------------|
| 0     | 4.443<br>4.4 4.4 4.4<br>0.98 0.98 0.98    | 7.025<br>7.0 7.0 7.0<br>0.36 0.36 0.36                 | 9.935<br>9.9 9.9 9.9<br>0.35 0.35 0.35     |
| 1     |                                           | 8.886<br>8.8 8.8 8.9<br>0.16 0.97 0.16                 | 11.327<br>11.3 11.3 11.3<br>0.24 0.24 0.24 |
| 2     |                                           |                                                        | 13.327<br>13.3 13.3 13.3<br>0.22 0.22 0.22 |
| 3     |                                           |                                                        |                                            |
|       | Exact (K <sub>T</sub> )<br>S K K<br>e e e | e= k <sub>T</sub> -k <sub>T</sub>  /k <sub>T</sub> (%) |                                            |

Table 2 Eigenvalues of the second problem (square(t<sub>0</sub>=0), N=28, Δk<sub>T</sub>=0.1, 8-point Gauss)

| m \ n | 1                                                         | 2                                      | 3                                          |
|-------|-----------------------------------------------------------|----------------------------------------|--------------------------------------------|
| 0     | 3.142<br>2.8 3.2 3.2<br>10.88 1.85 1.85                   | 6.283<br>6.3 6.3 6.3<br>0.27 0.27 0.27 | 9.425<br>9.3 9.4 9.5<br>1.33 0.27 0.80     |
| 1     | 4.443<br>4.3 4.5 4.5<br>3.22 1.28 1.28                    | 7.025<br>6.7 7.0 7.1<br>4.63 0.36 1.07 | 9.935<br>9.9 9.9 10.0<br>0.35 0.35 0.65    |
| 2     |                                                           | 8.886<br>8.7 8.9 8.9<br>2.09 0.16 0.16 | 11.327<br>11.1 11.3 11.4<br>1.12 0.26 0.64 |
|       | Exact (K <sub>T</sub> )<br>D <sub>n</sub> -K* -K<br>e e e |                                        |                                            |

Table 3 Eigenvalues of the third problem (rectangular(mixed, a/b=2), N=30, Δk<sub>T</sub>=0.1, 8-point Gauss)

| m \ n | 1                             | 2                                | 3                                | 4                                |
|-------|-------------------------------|----------------------------------|----------------------------------|----------------------------------|
| 0     | 6.283<br>6.3 6.2<br>0.27 1.32 | 12.566<br>12.6 12.6<br>0.27 0.27 | 18.850<br>18.9 18.8<br>0.27 0.27 | 25.133<br>25.2 25.1<br>0.27 0.13 |
| 1     | 7.025<br>7.0 7.0<br>0.36 0.36 | 12.953<br>13.0 12.9<br>0.36 0.41 | 19.110<br>19.1 19.1<br>0.05 0.05 | 25.328<br>25.2 25.3<br>0.51 0.11 |
| 2     |                               | 14.050<br>13.9 14.0<br>0.97 0.16 | 19.869<br>19.9 19.8<br>1.07 0.36 | 25.906<br>25.9 25.7<br>0.16 0.35 |
|       |                               |                                  |                                  | 0.02 0.80                        |

Table 4 Eigenvalues of the third problem (triangular(isos), a=0.01, 8-point Gauss)

| k <sub>T</sub>                                      | 1     | 2     | 3     | 4      | 5      | 6      | 7      | 8      | 9      | 10     |
|-----------------------------------------------------|-------|-------|-------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| k <sub>T</sub>                                      | 3.142 | 6.283 | 9.425 | 12.566 | 15.708 | 18.850 | 21.991 | 25.133 | 28.274 | 31.416 |
| k <sub>T</sub>                                      | 3.15  | 6.28  | 9.43  | 12.56  | 15.71  | 18.85  | 21.99  | 25.13  | 28.27  | 31.42  |
| k <sub>T</sub> -k <sub>T</sub>  /k <sub>T</sub> (%) | 0.25  | 0.05  | 0.21  | 0.05   | 0.05   | 0.11   | 0.05   | 0.05   | 0.07   | 0.05   |

より求めた結果を示している。この場合の固有値は1辺の正方形カ一種問題の固有値の部分集合(対角線について対称なモードに対応)となっており、この対応を $\pi^n$ として示しておいた。

[5] 固有密度、固有モードの精度について Fig.1~3は Table 5 に示した円形カ

一種問題の面外振動固有値節直径の数 $n=0, 1, 2$ , 節円の数 $\delta=0,$

$1, 2$  について、境界分割数 $N$ をとれど水  $1, 8, 16$  として固有密度

密度(0印)を最小自乗法( $x$ 軸上の密度を10と指定)により、固有モード

に対応する積分表示により求めた結果を示している。 $N$ の選

び方の指針としては、密度半波長の内部に3点を含むように選

んぐいる。固有密度の精度については、指定し

た値10の満足度が1つの目安となると思われる

が、今の場合各 $N$ について小数点以下2ケタの

精度で満足されている。Table 6 は固有モード

の精度を検討するために Fig.1~3の結果に対し

て節円の半径( $b$ )と線形内挿により求めたもの

である。 $T_1$ はBessel関数の零点比により求まる

正解を示している。これらの結果より、節

線により決まる密度半波長を表現するに最低

限必要な数の境界点をとれば、固有密度、固

有モードは、コンマ数パーセントの誤差内で

求まることかわかる。また固有値の精度との

関係において正確な密度を得るためには、固

有値は有効数2ケタの精度が必要である。

[6] 面内振動問題の固有値、固有密度、固有モード

求めた( $N=28, \nu=0.25$ )固有値のうち小さいものから3個 $k_T^{(1)}=3.39, k_T^{(2)}=3.85, k_T^{(3)}=5.25$ に対する固有密度および固有モ

ードを示している。円周上の法線方向に示した実線は $u_1$ , 点線は $u_2$ (固有密度)の分布を,  $x_1, x_2$ 軸の法線方向

に示した実線は $u_1$ , 点線は $u_2$ (固有モード)の分布を示している。これより、オ1モードは一軸引張的、オ2モ

ードはせん断的、オ3モードは2軸圧伸的なモードであることがわかる。面内振動問題の固有値に対する、固有

密度、固有モードはここに示した低次モードにおいてとてさながら複雑で、単純な対称性は全く注意を要する。

[7] おわりに オ1種、オ2種および混合問題の積分方程式のずれにおいても、また、積分核として、 $\mathcal{S}, \mathcal{K},$

$\mathcal{K}^*, \mathcal{D}_n$  いずれを含む積分方程式を構成しても、固有値、固有密度、固有モードはかなり精度よく求まることが

わかった。面内振動問題の固有値、固有密度、固有モードに関するより詳細な検討は当国報告する。

Table 5 Eigenvalues of the first problem (circular arc),  $\delta=0.001, 8$ -point Gauss on arc

| $n \setminus \delta$ | 0     | 1      | 2      |
|----------------------|-------|--------|--------|
| 0                    | 2.405 | 3.432  | 5.136  |
|                      | 2.408 | 3.833  | 5.135  |
|                      | 0.06  | 0.03   | 0.02   |
| 1                    | 5.520 | 7.016  | 8.617  |
|                      | 5.521 | 7.017  | 8.617  |
|                      | 0.02  | 0.01   | 0.00   |
| 2                    | 8.654 | 10.173 | 11.620 |
|                      | 8.656 | 10.176 | 11.619 |
|                      | 0.01  | 0.03   | 0.01   |

Table 6 Ratio of nodal circles ( $N=1(n=0), N=8(n=1), N=16(n=2)$ ; 8-point Gauss on arc)

| $n \setminus N$ | $n=0$  | $n=1$  | $n=2$  |
|-----------------|--------|--------|--------|
| $T_1$           | 0.4357 | 0.2780 | 0.5462 |
| $T_1$           | 0.4361 | 0.2789 | 0.5459 |
| error           | 0.09   | 0.32   | 0.05   |
| $T_2$           |        | 0.6379 | 0.6896 |
| $T_2$           |        | 0.6379 | 0.6823 |
| error           |        | 0.00   | 1.06   |

error =  $|T_1 - T_1|/T_1$  (3)

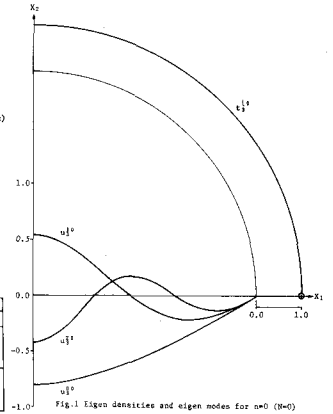


Fig.1 Eigen densities and eigen modes for  $n=0$  ( $N=0$ )

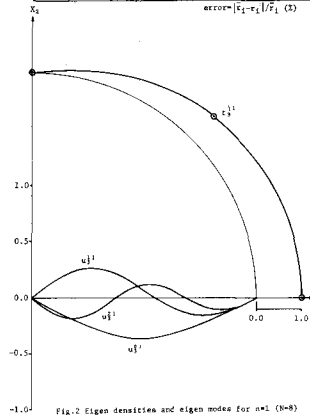


Fig.2 Eigen densities and eigen modes for  $n=1$  ( $N=8$ )

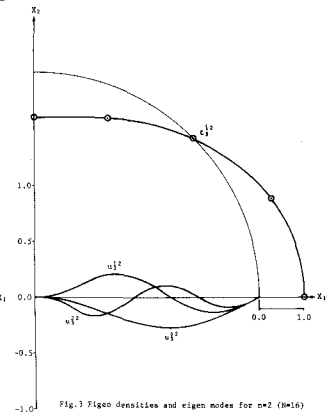


Fig.3 Eigen densities and eigen modes for  $n=2$  ( $N=16$ )

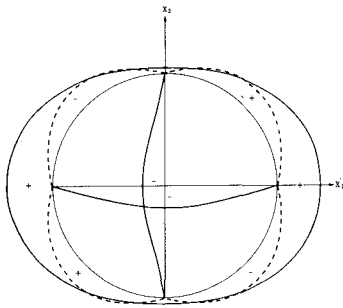


Fig.4 Eigen density and eigen mode ( $k_1^1=3.39$ )

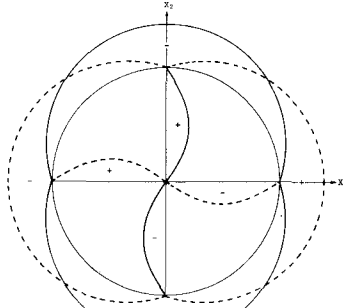


Fig.5 Eigen density and eigen mode ( $k_2^1=3.85$ )

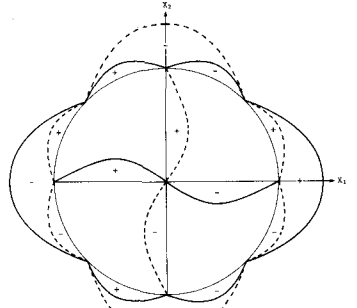


Fig.6 Eigen density and eigen mode ( $k_3^1=5.25$ )