I -4　　定常動弾性学に於ける積分方程式の解析的解法

京都大学工学部　正員　西村直志
京都大学工学部　正員　小林昭一

1　序

近年数値解析手法としての積分方程式法がよく利用されているが，解析的取扱いも可能である．本研究ではFourier 変換を用いて，動弾性学の積分方程式を解く手法を示す．

2　半無限弾性体

以下では，解が時間に関して$e^{-i\omega t}$的であるとする．Green 公式のFourier変換は一般に

$$\hat{u}_i = -\Delta^{*-1}_{ij}(i\xi)\,\hat{t}_j - \Delta^{*-1}_{ij}(i\xi)\,\Sigma_{kej}(i\xi)\,\widetilde{u_k n_e} - \Delta^{*-1}_{ij}(i\xi)\,\hat{b}_j \qquad ①$$

と書ける[1]．ここにu, t, b, nは，変位，表面力，物体力，境界に於ける外向き単位法線ベクトルであって，Δ^*_{ij}，Σ_{kej}は

$$\Delta^*_{ij} = (\mu\partial_k\partial_k - \rho\omega^2)\delta_{ij} + (\lambda+\mu)\partial_i\partial_j \quad , \quad \Sigma_{ijk} = \lambda\,\delta_{ij}\partial_k + \mu(\delta_{ik}\partial_j + \delta_{jk}\partial_i) \qquad ②,③$$

である．ρは密度である．また$\bar{u}$は考える領域D内でu，D外で0となる量であり，$\wedge$，$\sim$は3次元及び考える境界上でのFourier変換である（式⑦参照）。特にDが半空間$x_3>0$の場合，式①から

$$\tilde{u}_i = -\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\Delta^{*-1}_{ij}(i\xi)\,d\xi_3\,\tilde{t}_j + \frac{i}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\Delta^{*-1}_{ij}\Sigma_{k3j}(i\xi)\,d\xi_3\,\tilde{u}_k - \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\Delta^{*-1}_{ij}(i\xi)\,\hat{b}_j\,d\xi_3 \qquad ④$$

を得，これを代数的に解けば式①を逆変換して解が得られる．この場合，解がRadiation Conditionを満たす特異解の重ね合わせとして構成されるためには$\mathrm{Im}\,\omega = \varepsilon > 0$としておき，$\varepsilon \downarrow 0$の極限を考えねばならない．

以上の解法の例として，Mindlin解を求めてみる．この場合$\hat{b}_i = \delta_{ij}\,e^{-ic\xi_3}$である．ただし集中荷重は，点（0, 0, c）(c > 0) に於いてj方向に作用すると仮定した（j方向を明記してu_{ij}などと書く）。$\tilde{t}=0$に注意すれば式④より

$$\begin{pmatrix}\tilde{u}_{\alpha j}\\[2ex] \tilde{u}_{3j}\end{pmatrix} = \frac{1}{\mu}\begin{pmatrix} \dfrac{\delta_{\alpha\beta}}{R_T}e^{-cR_T} + \xi_\alpha\xi_\beta\left[\dfrac{(4R_TR_L-2r^2+k_T^2)e^{-cR_T} - 2R_T^2\,e^{-cR_L}}{R_T\,F(r)}\right] & -i\xi_\alpha\left[\dfrac{(2r^2-k_T^2)e^{-cR_T} - 2R_TR_L\,e^{-cR_L}}{F(r)}\right] \\[3ex] i\xi_\beta\left[\dfrac{(2r^2-k_T^2)\,e^{-cR_L} - 2R_TR_L\,e^{-cR_L}}{F(r)}\right] & -\dfrac{R_L\left[2r^2\,e^{-cR_T} + (k_T^2-2r^2)\,e^{-cR_L}\right]}{F(r)}\end{pmatrix} \qquad ⑤$$

を得る．ここに$k_{T,L}$は波数，$r=\sqrt{\xi_\alpha\xi_\alpha}$，$R_{T,L}=\sqrt{r^2-k_{T,L}^2}$ $\left(= -i\sqrt{k_{T,L}^2-r^2}\ \ \text{if}\ \ k_{T,L}>r\right)$，$F(r)=(2r^2-k_T^2)^2-4r^2R_TR_L$（Rayleigh 関数）である．従って式①より，良く知られたMindlin解

$$u_{ij} = \Gamma_{ij}(x_3-c) + \Gamma_{ij}(x_3+c)$$

$$+\frac{1}{2\pi\mu}\begin{pmatrix} \displaystyle\int_0^\infty\left(-\frac{\delta_{\alpha\beta}}{R}J_1(Rr)r^2 + \frac{x_\alpha x_\beta}{R^2}J_2(Rr)r^3\right)\frac{(2R_TR_L e^{-x_3R_T} \mp (2r^2-k_T^2)e^{-x_3R_L})(2R_TR_L e^{-cR_T} \mp (2r^2-k_T^2)e^{-cR_L})}{k_T^2R_L\,F(r)}dr & \displaystyle -\frac{x_\alpha}{R}\int_0^\infty\frac{(2r^2e^{-x_3R_L} \mp (2r^2-k_T^2)e^{-x_3R_T})(2R_TR_Le^{-cR_L} \mp (2r^2-k_T^2)e^{-cR_T})r^2}{k_T^2\,F(r)}J_1(Rr)\,dr \\[3ex] \displaystyle\frac{x_\beta}{R}\int_0^\infty\frac{(2r^2e^{-x_3R_T} \mp (2r^2-k_T^2)e^{-x_3R_L})(2R_TR_Le^{-cR_T} \mp (2r^2-k_T^2)e^{-cR_L})}{k_T^2\,F(r)}r^2J_1(Rr)\,dr & \displaystyle -\int_0^\infty\frac{(2R_TR_Le^{-x_3R_L} \mp (2r^2-k_T^2)e^{-x_3R_T})(2R_TR_Le^{-cR_L} \mp (2r^2-k_T^2)e^{-cR_T})r^3}{k_T^2R_TF(r)}J_0(Rr)\,dr\end{pmatrix} \qquad ⑥$$

を得る．ここに$R=\sqrt{x_\alpha x_\alpha}$であり，$\Gamma_{ij}(X)$は点$(0, 0, X)$に特異点を有する基本解である．上述のように，求めら

れた解が Radiation Condition を満たす特異解の重ね合わせとして構成されるためには，積分路はRayleigh 極の「下」を通らねばならない．

3 円板，もしくは円孔

本節では2次元平面歪状態を考える．また，解を一重層ポテンシアルで構成する．一般に一重層ポテンシアルの Fourier変換は，基本解Γ_{ij}と一重層密度φ_jに対して

$$\hat{u}_i = \widehat{\int_{\partial D}\Gamma_{ij}(x,y)\varphi_j(y)\,dS_y} = -\Delta^{*-1}_{ij}(i\xi)\tilde{\varphi}_j \quad , \quad \tilde{\varphi}_j = \int_{\partial D} e^{-i\xi\cdot y}\varphi_j(y)\,dS_y \tag{7}$$

と書けるが，Dが半径aの円の内（外）部であるときには

$$\tilde{\varphi}_j = a\sum_n (-i)^n J_n(ra)\,e^{in\theta}\varphi_j^n \tag{8}$$

となる．ここに$\xi=(r,\theta)$，φ_j^nは，φ_jの$e^{in\theta}$に関するFourier係数である．またΔ^{*-1}_{ij}は

$$-\Delta^{*-1}_{ij}(i\xi) = \frac{1}{4\mu}\left\{\left(\frac{1}{r^2-k_T^2}+\beta\frac{1}{r^2-k_L^2}\right)(v_i\bar{v}_j+\bar{v}_i v_j)-(v_i v_j e^{2i\theta}+\bar{v}_i\bar{v}_j e^{-2i\theta})\left(\frac{1}{r^2-k_T^2}-\beta\frac{1}{r^2-k_L^2}\right)\right\} \tag{9}$$

$$v = i_1 - i\,i_2 \ , \quad \bar{v} = i_1 + i\,i_2 \ , \quad \beta = k_L^2/k_T^2$$

と書けるので，式⑦を逆変換すれば容易に$R=\sqrt{x_\alpha x_\alpha}<a$に対して

$$\begin{aligned} u = \frac{ia}{16}\sum\Big\{&\left(J_{n+1}(k_TR)H^{(1)}_{n+1}(k_Ta)+\beta J_{n+1}(k_LR)H^{(1)}_{n+1}(k_La)\right)V\,\bar{\Phi}^n \\ &+\left(J_{n-1}(k_TR)H^{(1)}_{n-1}(k_Ta)+\beta J_{n-1}(k_LR)H^{(1)}_{n-1}(k_La)\right)\bar{V}\,\Phi^n \\ &+\left(J_{n+1}(k_TR)H^{(1)}_{n-1}(k_Ta)-\beta J_{n+1}(k_LR)H^{(1)}_{n-1}(k_La)\right)V\,\Phi^n \\ &+\left(J_{n-1}(k_TR)H^{(1)}_{n+1}(k_Ta)-\beta J_{n-1}(k_LR)H^{(1)}_{n+1}(k_La)\right)\bar{V}\,\bar{\Phi}^n\Big\}e^{in\Theta} \end{aligned} \tag{10}$$

を得る．ここに$V = i_r - i\,i_\theta$，$\bar{V} = i_r + i\,i_\theta$，$\Phi^n = \varphi_r^n - i\varphi_\theta^n$，$\bar{\Phi}^n = \varphi_r^n + i\varphi_\theta^n$，$x=(R,\Theta)$である．行列で式⑩を

$$\begin{pmatrix} u^V \\ u^{\bar{V}} \end{pmatrix} = \frac{ia}{16}\sum\begin{pmatrix} J_{n+1}(k_TR) & -J_{n+1}(k_LR) \\ J_{n-1}(k_TR) & J_{n-1}(k_LR)\end{pmatrix}\begin{pmatrix} H^{(1)}_{n+1}(k_Ta) & H^{(1)}_{n-1}(k_Ta) \\ -\beta H^{(1)}_{n+1}(k_La) & \beta H^{(1)}_{n-1}(k_La)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\bar{\Phi}^n \\ \Phi^n\end{pmatrix}e^{in\Theta} \tag{11}$$

と書く事もできる．式⑪の応用例として，その行列式を計算する事により固定された円板の固有振動数方程式

$$J_{n+1}(k_Ta)J_{n-1}(k_La) + J_{n+1}(k_La)J_{n-1}(k_Ta) = 0 \tag{12}$$

が得られる．なお，式⑪でJと$H^{(1)}$を交換すれば$R>a$に対する一重層ポテンシアルが求まる．

同様にして，$R=\mathrm{const}<a$に対する表面力は，$\alpha=1-\beta$とおいて

$$\begin{pmatrix} t^V \\ t^{\bar{V}} \end{pmatrix} = \frac{ia}{16}\sum\begin{pmatrix} -k_TJ_{n+2}(k_TR) & -k_L\left(\frac{\alpha}{\beta}J_n(k_LR)-J_{n+2}(k_LR)\right) \\ k_TJ_{n-2}(k_TR) & -k_L\left(\frac{\alpha}{\beta}J_n(k_LR)-J_{n-2}(k_LR)\right)\end{pmatrix}\begin{pmatrix} H^{(1)}_{n+1}(k_Ta) & H^{(1)}_{n-1}(k_Ta) \\ -\beta H^{(1)}_{n+1}(k_La) & \beta H^{(1)}_{n-1}(k_La)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\bar{\Phi}^n \\ \Phi^n\end{pmatrix}e^{in\Theta} \tag{13}$$

と書く事ができる．$R>a$に対しては，Jと$H^{(1)}$を交換すればよい．式⑬の応用例として，その行列式を計算する事により表面力を受けない円板の固有振動数方程式として

$$\alpha J_n(k_La)\left(J_{n+2}(k_Ta)+J_{n-2}(k_Ta)\right)-\beta\left(J_{n+2}(k_La)J_{n-2}(k_Ta)+J_{n+2}(k_Ta)J_{n-2}(k_La)\right)=0 \tag{14}$$

なる古典的結果が得られる．

1) S.Kobayashi and N. Nishimura ; Memo. Fac. Eng. Kyoto Univ., Vol. 42, No. 2 (to appear)