I-3 積分方程式法の1次元問題への適用

京都大学 正員 ○小林 昭一
〃 〃 西村 直志

1. はじめに

積分方程式法は，最近，2，3次元弾性学の境界値問題をはじめとして，次第に広く適用されるようになってきている。しかし，1次元問題への適用は殆んど見られない。これは，積分方程式法を1次元問題に適用しても，他の方法，すなわち，場の微分方程式を直接積分する方法，有限要素法，差分法など，に比べて必ずしも計算上有利でないということに原因があると考えられる。1次元問題は，簡単ではあるが，積分方程式法の原理と計算過程は全て含まれているので，1次元問題について検討することは積分方程式法を理解する上で大いに役立つであろう。この論文では，積分方程式法を1次元問題に適用し，梁の曲げ，固有振動，杭の座屈などいくつかの例を通して，この方法の有効性と汎用性とを示すことを試みた。

2. 積分方程式法

図-1に示すような一様断面の棒を考える。座標系としては直交直線座標系を選ぶと，棒の基礎微分方程式は次のようになる。

$$(1)\qquad \mathcal{L}y(x)+d(x)=0\ ,\quad \mathcal{L}\equiv a\frac{d^4}{dx^4}+b\frac{d^2}{dx^2}+c$$

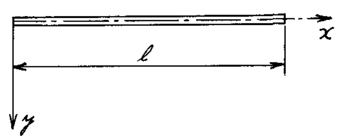

図-1 一様断面棒と座標系

ここに，a，b，cは定数とし，dはxの関数とする。プライム(′)は，xに関する微分を意味する。

上の微分方程式に対応するGreenの公式を示すと次のようになる。

$$(2)\qquad \int_0^l \mathcal{L}y\,v\,dx-\int_0^l \mathcal{L}v\,y\,dx=\left|ay'''v-ayv'''\right|_0^l-\left|ay''v'-ay'v''\right|_0^l+\left|by'v-byv'\right|_0^l$$

式(1)と次式で定義される基本解$G(x;\xi)$

$$(3)\qquad \mathcal{L}G(x;\xi)=-\delta(x-\xi)\quad ,\quad \delta(x-\xi);\ \text{Dirac delta}$$

を用いると，式(2)は次のように書き換えられる。

$$(4)\qquad y(\xi)=\int_0^l d(x)G(x;\xi)dx+\begin{bmatrix} aG(l;\xi) & -aG'(l;\xi) & aG''(l;\xi)+bG(l;\xi) & -aG'''(l;\xi)-bG'(l;\xi)\end{bmatrix}\begin{bmatrix} y'''(l)\\ y''(l)\\ y'(l)\\ y(l)\end{bmatrix}$$
$$-\begin{bmatrix} aG(0;\xi) & -aG'(0;\xi) & aG''(0;\xi)+bG(0;\xi) & -aG'''(0;\xi)-bG'(0;\xi)\end{bmatrix}\begin{bmatrix} y'''(0)\\ y''(0)\\ y'(0)\\ y(0)\end{bmatrix}$$

式(4)のξに関する微分をドット(・)を付けて示すと，容易に次の関係が得られる。

$$(5)\qquad \begin{bmatrix} y(\xi)\\ \dot{y}(\xi)\\ \ddot{y}(\xi)\\ \dddot{y}(\xi)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \int_0^l d(x)G(x;\xi)dx\\ \int_0^l d(x)\dot{G}(x;\xi)dx\\ \int_0^l d(x)\ddot{G}(x;\xi)dx\\ \int_0^l d(x)\dddot{G}(x;\xi)dx\end{bmatrix}+\begin{bmatrix} aG(l;\xi) & -aG'(l;\xi) & aG''(l;\xi)+bG(l;\xi) & -aG'''(l;\xi)-bG'(l;\xi)\\ a\dot{G}(l;\xi) & -a\dot{G}'(l;\xi) & a\dot{G}''(l;\xi)+b\dot{G}(l;\xi) & -a\dot{G}'''(l;\xi)-b\dot{G}'(l;\xi)\\ a\ddot{G}(l;\xi) & -a\ddot{G}'(l;\xi) & a\ddot{G}''(l;\xi)+b\ddot{G}(l;\xi) & -a\ddot{G}'''(l;\xi)-b\ddot{G}'(l;\xi)\\ a\dddot{G}(l;\xi) & -a\dddot{G}'(l;\xi) & a\dddot{G}''(l;\xi)+b\dddot{G}(l;\xi) & -a\dddot{G}'''(l;\xi)-b\dddot{G}'(l;\xi)\end{bmatrix}\begin{bmatrix} y'''(l)\\ y''(l)\\ y'(l)\\ y(l)\end{bmatrix}$$

$$
-\begin{bmatrix} aG(0;\xi) & -aG'(0;\xi) & aG''(0;\xi)+bG(0;\xi) & -aG'''(0;\xi)-bG'(0;\xi) \\ a\dot{G}(0;\xi) & -a\dot{G}'(0;\xi) & a\dot{G}''(0;\xi)+b\dot{G}(0;\xi) & -a\dot{G}'''(0;\xi)-b\dot{G}'(0;\xi) \\ a\ddot{G}(0;\xi) & -a\ddot{G}'(0;\xi) & a\ddot{G}''(0;\xi)+b\ddot{G}(0;\xi) & -a\ddot{G}'''(0;\xi)-b\ddot{G}'(0;\xi) \\ a\dddot{G}(0;\xi) & -a\dddot{G}'(0;\xi) & a\dddot{G}''(0;\xi)+b\dddot{G}(0;\xi) & -a\dddot{G}'''(0;\xi)-b\dddot{G}'(0;\xi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y'''(0) \\ y''(0) \\ y'(0) \\ y(0) \end{bmatrix}
$$

$\xi=0,\ l$ の境界条件は，$y(\xi)$ およびその導関数で，$\xi\to 0_+,\ l_-$ とした極限の値で与えられる。 したがって，式(ト)に与えられた境界条件を入れて解くと，残りの規定されていない境界値が定まる。 これを逆に式(5)に代入すると，$y(\xi)$ およびその導関数が求められることになる。 固有値問題では，式(1)で $d(x)=0$ であるので，式(5)の右辺第1項は 0 となり，非自明解が存在するためには，式(ト)に境界条件を代入して得られる 4×4 の係数行列式が 0 となることが必要となる。 これより固有値が求まり，固有モードは，式(4)より求まることになる。

3. 基本解

基本解は，式(3)を満す解として定義され，Fourier変換などにより容易に求めることができる。 基本解とその2階の導関数までは連続であり，$\lim_{x\to\xi_+} G'''(x;\xi)-\lim_{x\to\xi_-} G'''(x;\xi)=-1$ という性質がある。 以下に基本解の例を示す。

i) 梁：式(1)で，$a=EI$(曲げ剛性)，$b=c=0$

$$(6)\qquad G(x;\xi)=-\frac{|x-\xi|^3}{12EI}$$

ii) 弾性床上の梁：式(1)で，$a=EI,\ b=0,\ c=k$ (地盤係数)

$$(7)\qquad G(x;\xi)=-\frac{e^{-\lambda|x-\xi|}}{8EI\lambda^3}\{\cos\lambda|x-\xi|+\sin\lambda|x-\xi|\},\quad \lambda^4=\frac{k}{4EI}$$

iii) 梁の横振動：$y(x)e^{i\omega t}$ (ω；円振動数)の調和振動

式(1)で，$a=EI,\ b=0,\ c=-\rho A\omega^2$ (ρ:密度，A:断面積)，$d=0$

$$(8)\qquad G(x;\xi)=\frac{1}{4k^3}\{e^{-k|x-\xi|}-ie^{ik|x-\xi|}\},\quad k^4=\frac{\rho A\omega^2}{EI}$$

$$\lim_{|x|\to\infty} G(x)=O(|x|^{-1}),\quad \lim\left(\frac{dG(x)}{d|x|}-ikG(x)\right)=o(|x|^{-1})$$

(Sommerfeld 放射条件)

iv) 柱のオイラー座屈：式(1)で，$a=EI$，$b=P$ (軸力)，$c=d=0$

$$(9)\qquad G(x;\xi)=-\frac{|x-\xi|}{2EIk^2}+\frac{\sin k|x-\xi|}{2EIk^3}$$

$$k^4=\frac{P}{EI}$$

4. 例

i) 梁の曲げ

a) 分布荷重 $q(x)$ を受ける単純梁

境界条件：$y(0)=y''(0)=y(l)=y''(l)=0$

$$\lim_{\xi\to 0_+,\,l_-} y(\xi)=0,\quad \lim_{\xi\to 0_+,\,l_-} \ddot{y}(\xi)=0$$

式(5)，(6)と境界条件より未規定境界値が求まる。

$$y'''(l_-)=\frac{1}{EIl}\int_0^l q(x)x\,dx,\quad y'''(0_+)=-\frac{1}{EIl}\int_0^l q(x)(l-x)\,dx$$

$$y'(l_-)=\frac{1}{6EI}\left\{\frac{1}{l}\int_0^l q(x)x^3dx-l\int_0^l q(x)x\,dx\right\}$$

$$y'(0_+)=-\frac{1}{6EI}\left\{\frac{1}{l}\int_0^l q(x)(l-x)^3dx-l\int_0^l q(x)(l-x)\,dx\right\}$$

b) 集中荷重 $P\delta(x-\tau)$ を受ける片持梁

境界条件：$y(0)=y'(0)=0$，$y''(l)=y'''(l)=0$ etc.

未規定境界値；$y'(l_-)=P\tau^2/2EI$，$y(l_-)=P\tau^2(3l-\tau)/6EI$

$$y''(0_+)=-P\tau,\quad y'''(0_+)=P$$

たわみ曲線；$y(\xi)=\dfrac{P}{6EI}\begin{cases}\xi^2(3\tau-\xi), & \tau\geq\xi \\ \tau^2(3\xi-\tau), & \tau<\xi\end{cases}$

ii) 片持梁の固有振動

境界条件：$y(0)=y'(0)=0$，$y''(l)=y'''(l)=0$ etc.

式(ト)より，

$$\begin{bmatrix} y(0) \\ \dot{y}(0) \\ \ddot{y}(l) \\ \dddot{y}(l) \end{bmatrix}=EI\begin{bmatrix} G''(l;0) & -G''(l;0) & -G(0;0) & G'(0;0) \\ \dot{G}''(l;0) & -\dot{G}''(l;0) & -\dot{G}(0;0) & \dot{G}'(0;0) \\ \ddot{G}''(l;l) & -\ddot{G}''(l;l) & -\ddot{G}(0;l) & \ddot{G}'(0;l) \\ \dddot{G}''(l;l) & -\dddot{G}''(l;l) & -\dddot{G}(0;l) & \dddot{G}'(0;l) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y'(l) \\ y(l) \\ y'''(0) \\ y''(0) \end{bmatrix}$$

を得，式(8)を代入して，係数行列式を 0 とすると，

$$\cos kl\,\cosh kl+1=0$$

を得る。

iii) 両端ヒンジ柱の座屈荷重

境界条件：$y(0)=y''(0)=0$，$y(l)=y''(l)=0$

式(ト)，(9)と境界条件を用いると，座屈条件式

$$\sin kl=0$$

を得る。