I-2　有限変形における停留補エネルギーの原理とその応用

熊本大学工学部　正員　○三池亮次

1．はじめに　微小変形理論における補エネルギーの概念は，最初Engesserによって導入され，Westergaadはこれを多くの構造上の問題に応用した。近年Libov，Oran，Baronらは，骨組構造の有限変形解析に補エネルギーの概念の応用を試みているが，理論的追究はなお不十分のように思われる。一方鷲津の著書などにおいて，Reissnerの汎関数のFriedrich変換による有限変形停留補エネルギーの原理の誘導が試みられている。

ここでは，物体に表面力pと物体力fが作用して有限の変位を生じ釣り合い状態にあるとき，そのような変位を生ぜしめるような力系（表面力，物体力および応力分布）は，次節で定義される補エネルギーΠ^*を極値とするような値をとることを示す。

2．有限変形停留補エネルギーの原理　補エネルギΠ^*を，

$$\Pi^* = \iiint_V U_K^* \, dV - \iiint_V f \cdot u \, dV - \iint_A p \cdot u \, dA \tag{1}$$

と定義する。ここにU_K^*はKirchhoff応力テンソルT_Kのある関数とする。また変位uは，力系に対して独立であり，物体内部の任意点において物体力fと応力テンソルT_Kとの間に

$$\left(\frac{\partial x}{\partial a} T_K\right) \frac{\partial}{\partial a} + f = 0 \tag{2}$$

および境界において，表面力pとT_Kとの間の釣り合い式（$n_0 = [n_1\ n_2\ n_3]$は物体表面の法線ベクトル）

$$\frac{\partial x}{\partial a} T_K n_0 = p \tag{3}$$

が成立するものとする。またT_Kは対称であって$T_K = T_K^{(t)}$である。$a = [a_1\ a_2\ a_3]^{(t)}$および$x = [x_1\ x_2\ x_3]^{(t)}$は変形の前後における位置ベクトルである。

Lagrangeの未定係数をλ，μおよびΩとし，物体内部において

$$f(a; f, T_K) = U_K^* - f \cdot u + \lambda^{(t)} \left\{ \left(\frac{\partial x}{\partial a} T_K\right) \frac{\partial}{\partial a} + f \right\} + \mathrm{trace}\left\{ (T_K - T_K^{(t)}) \Omega \right\} \tag{4}$$

物体表面において

$$H(a; p, T_K) = -p \cdot u_0 + \mu^{(t)} \left(\frac{\partial x}{\partial a} T_K n_0 - p \right) \tag{5}$$

とするとき，汎関数Π^*は

$$\Pi^* = \iiint_V f(a; f, T_K) \, dV + \iint_A H(a; p, T_K) \, dA \tag{6}$$

のように付帯条件のついた汎関数となる。式(1)と式(6)は等価である。Kirchhoff応力テンソル$T_K = [\tau_{K1}\ \tau_{K2}\ \tau_{K3}]$，$\tau_{Ki} = [\tau_{Ki1}\ \tau_{Ki2}\ \tau_{Ki3}]^{(t)}$とすると，$\Pi^*$の停留条件は，総和規約を用い

$$\delta\Pi^* = \iiint_V \left[\delta\tau_{Kij} \left\{ \frac{\partial f}{\partial \tau_{Kij}} - \frac{\partial}{\partial a_\ell} \left(\frac{\partial f}{\partial \tau_{Kij,\ell}} \right) \right\} + \delta f \cdot \frac{\partial f}{\partial f} \right] dV + \iint_A \left[\delta\tau_{Kij} \left\{ \frac{\partial f}{\partial \tau_{Kij,\ell}} n_\ell + \frac{\partial H}{\partial \tau_{Kij}} \right\} + \delta p \cdot \frac{\partial H}{\partial p} \right] dA = 0 \tag{7}$$

しかるに

$$\frac{\partial f}{\partial f} = -u + \lambda \quad したがって \quad \lambda = u \tag{8}$$

また、Euler 方程式として

$$\frac{\partial f}{\partial \tau_i} - \frac{\partial}{\partial a_k}\frac{\partial f}{\partial \tau_{i,k}} = 0$$

を得るが、上式はまた $\mathbb{T}'_{ki} = [\tau_{ki,1}\ \ \tau_{ki,2}\ \ \tau_{ki,3}]$ を定義すれば

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbb{T}_k} - \left[\frac{\partial f}{\partial \mathbb{T}'_{k1}}\frac{\partial}{\partial a}\ \ \frac{\partial f}{\partial \mathbb{T}'_{k2}}\frac{\partial}{\partial a}\ \ \frac{\partial f}{\partial \mathbb{T}'_{k3}}\frac{\partial}{\partial a}\right] = 0 \tag{9}$$

のように表示できる。しかるに総和規約を用い、

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial x}{\partial a}\mathbb{T}_k\right)\frac{\partial}{\partial a} &= \left\{\frac{\partial x}{\partial a}[\tau_{k1}\ \ \tau_{k2}\ \ \tau_{k3}]\right\}\frac{\partial}{\partial a} = \frac{\partial}{\partial a_i}\left(\frac{\partial x}{\partial a}\tau_{ki}\right)\\ &= \frac{\partial x}{\partial a}\tau_{ki,i} + \left(\frac{\partial}{\partial a_i}\frac{\partial x}{\partial a}\right)\tau_{ki} = \frac{\partial x}{\partial a}\left(\mathbb{T}_k\frac{\partial}{\partial a}\right) + \left(\frac{\partial}{\partial a_i}\frac{\partial x}{\partial a}\right)\tau_{ki}\end{aligned} \tag{10}$$

であるから

$$\frac{\partial}{\partial \tau_{ki}}\left\{\lambda^{(t)}\left(\left(\frac{\partial x}{\partial a}\mathbb{T}_k\right)\frac{\partial}{\partial a}\right)\right\} = \left(\frac{\partial}{\partial a_i}\frac{\partial x}{\partial a}\right)^{(t)}\lambda$$

したがって

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbb{T}_k} = \frac{\partial U_k^*}{\partial \mathbb{T}_k} + \Omega - \Omega^{(t)} + \left[\left(\frac{\partial}{\partial a_1}\frac{\partial x}{\partial a}\right)^{(t)}\lambda\ \ \left(\frac{\partial}{\partial a_2}\frac{\partial x}{\partial a}\right)^{(t)}\lambda\ \ \left(\frac{\partial}{\partial a_3}\frac{\partial x}{\partial a}\right)^{(t)}\lambda\right] \tag{11}$$

同様に

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbb{T}'_{k1}} = \left[\frac{\partial f}{\partial \tau_{k1,1}}\ \ \frac{\partial f}{\partial \tau_{k1,2}}\ \ \frac{\partial f}{\partial \tau_{k1,3}}\right] = \left[\left(\frac{\partial x}{\partial a}\right)^{(t)}\lambda\ \ \ 0\ \ \ 0\right]$$

これより、一般に

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbb{T}'_{ki}}\frac{\partial}{\partial a} = \frac{\partial}{\partial a_i}\left\{\left(\frac{\partial x}{\partial a}\right)^{(t)}\lambda\right\} = \left(\frac{\partial}{\partial a_i}\frac{\partial x}{\partial a}\right)^{(t)}\lambda + \left(\frac{\partial x}{\partial a}\right)^{(t)}\frac{\partial \lambda}{\partial a_i} \tag{12}$$

式(11)と(12)を式(9)に代入し、かつ式(8)を用いて、

$$\frac{\partial U_k^*}{\partial \mathbb{T}_k} + \Omega - \Omega^{(t)} - \left(\frac{\partial x}{\partial a}\right)^{(t)}\frac{\partial u}{\partial a} = \frac{\partial U_k^*}{\partial \mathbb{T}_k} + \Omega - \Omega^{(t)} - \left\{\frac{\partial u}{\partial a} + \left(\frac{\partial u}{\partial a}\right)^{(t)}\left(\frac{\partial u}{\partial a}\right)\right\} = 0 \tag{13}$$

を得る。これより Euler 方程式は

$$\frac{\partial U_k^*}{\partial \mathbb{T}_k} = \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial u}{\partial a} + \left(\frac{\partial u}{\partial a}\right)^{(t)}\right\} + \left(\frac{\partial u}{\partial a}\right)^{(t)}\left(\frac{\partial u}{\partial a}\right) = \mathbb{E}_g + \underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial a}\right)^{(t)}\left(\frac{\partial u}{\partial a}\right)}_{\mathbb{E}_\theta} \equiv \mathbb{E}_k \tag{14}$$

ここに、$\mathbb{E}_g$ は Green ひずみテンソルで、

$$\mathbb{E}_g = \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial u}{\partial a} + \left(\frac{\partial u}{\partial a}\right)^{(t)} + \left(\frac{\partial u}{\partial a}\right)^{(t)}\left(\frac{\partial u}{\partial a}\right)\right\}$$

であり、もし $\mathbb{T}_k$ と $\mathbb{E}_g$ の間に通常の構成方程式

$$\mathbb{E}_g = \frac{1}{2E}\left\{(1+\nu)\mathbb{T}_k - \nu\,\mathrm{trace}(\mathbb{T}_k)\cdot\mathbb{I}\right\}$$

が成立する場合には、補ひずみエネルギー U_k^* として

$$U^* = \frac{1}{2E}\left[(1+\nu)\,\mathrm{trace}(\mathbb{T}_k^2) - \nu\left\{\mathrm{trace}(\mathbb{T}_k)\right\}^2\right] + \mathrm{trace}(\mathbb{T}_k\mathbb{E}_\theta)$$

を選ぶことができる。有限変形では上式の右辺第2項が加わる。式(7)において面積積分の項を零とする条件や、簡単な応用例については、講演時に発表する。