I-1　非平衡熱力学に基づいた連続体における変分原理の統一研究

東北大学工学部　正員　○新関　茂
同　上　佐武正雄

1）まえがき

従来の変分原理の探求は，主として構成方程式を含む支配方程式系を基礎として行なわれてきたように思われる．しかしながら，自然界に継続的に存在する現象は常に安定であり，もし何らかの要因により不安定化した場合，その現象は直ちに別な安定状態に時間発展しなければならない．物理現象の最大・最小性は，個々の材料の性質とは無関係に自然界における現象の安定性に基づいて生じるものであり，逆に，個々の材料の構成方程式に制約を与えるものであると考えられる．本論文は，このような観点から，非平衡熱力学を基礎として安定条件を定式化し，連続体力学における変分原理の統一的研究を行ったものである．

2）非平衡熱力学の基本法則

デカルト座標系 $x_i\,(i=1,2,3)$ における Euler 表示を用い，ρ を密度，$v_i(=\dot{x}_i)$ を速度，e を単位質量当たりの内部エネルギー，f_i を物体力，t_i を表面力，q_i を熱流束，r を単位質量当たりの内部熱源からの発熱量，n_i を単位法線ベクトルとすれば，熱力学オ一法則は，

$$\dot{K}+\dot{E}=W+Q \tag{2.1}$$

ここに

$$K=(1/2)\int_V \rho v_i v_i\, dv \tag{2.2}$$

$$E=\int_V \rho e\, dv \tag{2.3}$$

$$W=\int_V f_i v_i\, dv+\int_{\partial V} t_i v_i\, dv \tag{2.4}$$

$$Q=\int_{\partial V} q_i n_i\, dS+\int_V \rho r\, dv \tag{2.5}$$

で，$(\dot{\ })=D/Dt$ である．式(2.2)－(2.5)を式(2.1)に代入し，質量保存の法則及び運動量保存の法則を用いれば，式(2.1)は

$$\rho\dot{e}=\sigma_{ij}d_{ij}+q_{i,i}+\rho r \tag{2.6}$$

ここに

$$d_{ij}=(v_{i,j}+v_{j,i})/2 \tag{2.7}$$

と書き換えられる．比エントロピー生成率 ${}_i\dot{S}$ とエントロピー流 ${}_e\dot{S}$ から構成される全比エントロピー変化率を $\dot{S}$ とすれば，熱力学オ2法則は

$$\frac{D}{Dt}\int_V \rho_i S\, dv=\frac{D}{Dt}\int_V \rho_e S\, dv-\int_{\partial V}\frac{q_i n_i}{\theta}\,dS-\int_V \rho\frac{r}{\theta}\,dv\geqq 0 \tag{2.8}$$

と記され，質量保存の法則を用いれば，θ を絶対温度として

$${}_i\dot{S}=\dot{S}-{}_e\dot{S}\geqq 0 \tag{2.9}$$

ここに

$$\rho_e\dot{S}=(q_i/\theta)_{,i}+\rho(r/\theta) \tag{2.10}$$

と書き換えられる．式(2.6)，(2.9)(2.10)より，次の Clausius-Duhem の不等式が導びかれる．

$$\rho(\dot{S}-\dot{e}/\theta)+\sigma_{ij}d_{ij}/\theta+q_i\theta_{,i}/\theta^2\geqq 0 \tag{2.11}$$

次に，レオロジーモデルを導入し，応力テンソル及び変形速度テンソルの可逆的な部分をそれぞれ ${}_E\sigma_{ij}$，${}_Ed_{ij}$ とすれば，可逆的仕事率は ${}_E\sigma_{ij}\,{}_Ed_{ij}$ で表わされ，また非可逆的仕事率は

$$\hat{\sigma}=\sigma_{ij}d_{ij}-{}_E\sigma_{ij}\,{}_Ed_{ij} \tag{2.12}$$

で与えられる．式(2.6)(2.9)(2.10)，(2.12)により

$$\rho\dot{e}=\rho\theta\dot{S}+{}_E\sigma_{ij}\,{}_Ed_{ij} \tag{2.13}$$

が導びかれる．上式は，再び式(2.12)を用いることにより

$$\rho\dot{e}=\rho\theta\dot{S}+\sigma_{ij}d_{ij}-\hat{\sigma} \tag{2.14}$$

φ を単位質量当たりの自由エネルギーとし，熱力学ポテンシャル間の関係式

$$e=\varphi+\theta S \tag{2.15}$$

を用いれば，式(2.13)(2.14)は，それぞれ

$$\rho\dot{\varphi}=-\rho\dot{\theta}S+{}_E\sigma_{ij}\,{}_Ed_{ij} \tag{2.16}$$

$$\rho\dot{\varphi}=-\rho\dot{\theta}S+\sigma_{ij}d_{ij}-\hat{\sigma} \tag{2.17}$$

と書き換えられる．式(2.13)(2.14)(2.16)(2.17)は，それぞれ自由エネルギーの釣合式であり，Gibbs の関係式と呼ばれるものである．また，式(2.1)(2.14)より，エントロピーの釣合式

$$\rho\theta\dot{S}=\hat{\sigma}+q_{i,i}+\rho r \tag{2.18}$$

が求められ，上式と式(2.9)(2.10)より，次式が導びかれる．

$$\rho\theta_i\dot{S}=\hat{\sigma}+(\ln\theta)_{,i}\,q_i$$

3）非平衡熱力学に基づいた安定条件と変分原理

連続の方程式，Euler の運動方程式，速度－変形速度テンソルの関係は，それぞれ

$$\dot{\rho}+\rho v_{i,i}=0 \tag{3.1}$$

$$\sigma_{ij,j}+\hat{f}_i=\rho\dot{v} \tag{3.2}$$

$$d_{ij}=(v_{i,j}+v_{j,i})/2 \tag{3.3}$$

境界条件は

$$\sigma_{ij}n_j=\hat{t}_i,\ \partial V_\sigma\ \text{上} \tag{3.4}$$

$$v_i=\hat{v}_i,\ \partial V_v\ \text{上}\quad\text{または}\quad x_i=\hat{x}_i,\ \partial V_x\ \text{上} \tag{3.5}$$

初期条件は，

$$v_i(x_i,0)=\sigma_{ij}(x_i,0)=0,\quad x_i=x_{0i}, \tag{3.6}$$

式(2.10)と Clausius-Duhem の不等式(2.11)より

$$\rho(\dot{S}-\dot{e}/\theta)+\sigma_{ij}d_{ij}/\theta-q_i(\theta^{-1})_{,i}$$
$$=-\rho\dot{e}/\theta+\sigma_{ij}d_{ij}/\theta+q_{i,i}/\theta+\rho r/\theta+\rho_i\dot{S}\geq 0 \qquad (3.6)$$

となるが、これを次のように書き換える。

$$\theta\rho_i\dot{S}\geq\rho\dot{e}-(\sigma_{ij}d_{ij}+q_{i,i}+\rho r) \qquad (3.7)$$

上式の右辺は熱力学オ1法則よりゼロとなるべきであるが、ここでは

$$\rho\dot{e}\geq\sigma_{ij}d_{ij}+q_{i,i}+\rho r \qquad (3.8)$$

となるような摂動を加えるものとする。この摂動は式(3.7)から明らかなように、熱力学オ1法則(2.6)を恒常的には満足しないが、オ2法則(2.9)には反していない。上式は、自然界における安定な現象が、摂動を受けた場合、常に満足しなければならない条件を表わしていると考えられる。式(3.8)の全ての力学量に摂動がなく、真の値と一致する場合には、当然熱力学オ1法則により、恒等的に等号が成立しなければならない。したがって「真の非平衡状態は、その近傍の摂動を受けた状態と比較し、内部エネルギーの変化率が最小で、外的仕事率と熱仕事率の和は最大である」と述べることができる。また、エントロピに関しては、釣合方程式(2.18)が満たされていると考えれば、式(2.2),(2.15)により、式(3.8)は

$$\rho\dot{\varphi}\geq{}_E\sigma_{ij}\,{}_Ed_{ij}-\rho\dot{\theta}S \qquad (3.9)$$

と書き換えられる。同様に、式(3.8)において、自由エネルギーの釣合式(2.14)が満たされているものとすれば、式(2.10)を用い、式(3.8)は

$$\rho\theta_i\dot{S}\geq\hat{\sigma}+(\ln\theta)_{,i}q_i \qquad (3.10)$$

上式は、非線形現象に拡張されたエントロピー生成率最小の原理を表わしている。次に、Glansdorff-Prigogin の理論[2]との関係について説明する。不等式(3.8)において、$q_i=r=0$とし、式(3.1)-(3.4)及び(3.5)のオ1式を用い、区間$[t_1,t_2]$で定積分すれば

$$\int_{t_1}^{t_2}\int_V\rho(\dot{e}+v_i\dot{v}_i)dv\,dt\geq\int_{t_1}^{t_2}\left(\int_V\hat{f}_iv_idv+\int_{\partial V_\sigma}\hat{t}_iv_idS+\int_{\partial V_v}t_i\hat{v}_idS\right)dt \qquad (3.11)$$

$\rho\dot{e}=\sigma_{ij}d_{ij}$とおき、$\sigma^\circ_{ij}$, v°_iを正解とし、$\sigma_{ij}=\sigma^\circ_{ij}+\delta\sigma_{ij}$、$v_i=v_i^\circ+\delta v_i$で、時間$t=t_1$及び$t_2$では、$\sigma_{ij}$と$v_i$は、正解に一致するものとすれば、式(3.2)(3.3)により、式(3.11)は

$$\int_{t_1}^{t_2}\int_V\rho(\delta\sigma_{ij}\delta d_{ij}-\delta v_i\delta\dot{v}_i)dv\,dt\geq 0 \qquad (3.12)$$

積分区間$[t_1,t_2]$及び体積Vの任意性により、上式は

$$\delta\sigma_{ij}\delta d_{ij}-\delta v_i\delta\dot{v}_i\geq 0 \qquad (3.13)$$

と書き換えられる。この安定条件は保存力を含んでおり、Glansdorff-Prigogin の安定条件の拡張と考えられる。散逸機構にだけ注目し、固定された温度θ_0で式(3.13)を割りれば、Glansdorff-Prigogin の流体・熱力学的安定条件に一致する。

4) 代表的な種々の変分原理の誘導

式(3.8)を体積々分し、式(3.2),(3.3)を用いれば

$$\int_V\rho(\dot{e}+v_i\dot{v}_i)dv\geq\int_V\hat{f}_iv_idv+\int_{\partial V}t_iv_idS \qquad (4.1)$$

境界条件(3.4)と(3.5)のオ2式を代入し、$\hat{f}_i$及び$\hat{t}_i$を保存力とし、区間$[0,t]$で不定積分し、更に区間$[t_1,t_2]$で定積分すれば

$$\int_{t_1}^{t_2}\int_V\rho v_iv_idv\geq J \qquad (4.2)$$

ここに

$$J=\int_{t_1}^{t_2}\int\frac{\rho}{2}v_iv_idv\,dt-\int_{t_1}^{t_2}\left(\int_v\rho e\,dv-\int_v\hat{f}_i\chi_idv-\int_{\partial V_\sigma}\hat{t}_i\chi_idS\right)dt \qquad (4.3)$$

このJは拡張されたHamiltonの原理の汎関数であり、$\delta J=0$とすれば、動的問題における仮仕事原理となる。また、拡張されたToupinの原理の汎関数IはJのLegendre変換により求められる。最小ポテンシャル・エネルギー及び補足ポテンシャル・エネルギーの原理に対応する汎関数はJとIにおいて、運動エネルギーを無視すれば導びかれる。次に、増分形の変分原理について、説明する。加速度を無視し、式(3.2)と(3.4)を次のように書き換える。

$$\bar{\sigma}_{ij,j}+\hat{\hat{f}}_i=0 \qquad (4.4)$$

$$\bar{\sigma}_{ij}n_j=\hat{\hat{t}}_i\,,\quad \partial V_\sigma\text{上} \qquad (4.5)$$

ここに、$\bar{\sigma}_{ij}$は stress flux テンソルである。式(4.1)において、$\rho\dot{e}=\sigma_{ij}d_{ij}$、$\sigma_{ij}=\sigma^\circ_{ij}+\bar{\sigma}_{ij}$とおき、これに対応させて、$\hat{f}_i=\hat{f}^\circ_i+\hat{\hat{f}}_i$, $\hat{t}_i=\hat{t}^\circ_i+\hat{\hat{t}}_i$とし、式(3.5)のオ1式と(4.5)を用い、加速度を無視すれば、式(4.1)から

$$\int_V\bar{\sigma}_{ij}d_{ij}dv\geq\int_V\hat{\hat{f}}_iv_idv+\int_{\partial V_\sigma}\hat{\hat{t}}_iv_idS+\int_{\partial V_v}\bar{t}_i\hat{v}_idS \qquad (4.6)$$

が導びかれる。上式の受けている摂動は任意であるから、これを次に述べる2種類の摂動でおきかえることができる。式(3.3)(3.5)のオ1式を満たす速度をv_i^*、これに対応した stress flux テンソルを$\bar{\sigma}^*_{ij}$、同様に、式(4.4)(4.5)を満たす stress flux テンソルを$\bar{\sigma}^{**}_{ij}$、これに対応した速度をv_i^{**}とすれば、式(4.6)は

$$K\geq L \qquad (4.7)$$

ここに

$$K=\frac{1}{2}\int_V\bar{\sigma}^*_{ij}d^*_{ij}dv-\int_V\hat{\hat{f}}_iv_i^*dv-\int_{\partial V_\sigma}\hat{\hat{t}}_iv_i^*dS \qquad (4.8)$$

$$L=-\frac{1}{2}\int_V\bar{\sigma}^{**}_{ij}d^{**}_{ij}dv+\int_{\partial V}t_i^{**}\hat{v}_idS \qquad (4.9)$$

と書き換えられる。上式は弾塑性論における双対変分原理に対応する。上述以外の誘導は紙面の都合で省略する。

5) あとがき

不等式(3.8)-(3.10)は連続体力学における最も普遍的な安定条件と変分原理を表わしていると考えられる。すでに文献(3)では別な方法によるこれらの式の誘導とその応用として、Roweのエネルギー比最小の原理の誘導を行ったが、本研究の詳細と応用については別の機会に述べることにする。

なお、本研究は財団法人建設工学振興会建設工学奨励金の授与を受て行ったものであることをここに記し謝意を表します。また、推薦の労をとって下さった東北大学工学部倉西茂教授に謝意を表します。

参考文献 (1) Coleman, B. D., Arch. Rat. Mech. Anal. Vol.17, 1964. (2) Glansdorff, P. & Prigogin, I., 構造安定性・ゆらぎ, みすず書房, 1977
(3) 新関, 佐武, 土木学会東北支部技術研究発表会, 1980