

電力中央研究所 正員 遠藤孝夫

電力中央研究所 正員 田辺忠顕

電力中央研究所 正員 山川秀次

1. まえがき

本報告は、あらかじめ実施した非定常温度分布解析結果をもとに行った熱応力解析について述べたものである。解析は、鉄筋コンクリート構造物にひびわれが生じて各部で剛性が変化することを考慮して、非対称荷重を受ける非対称剛性を有する軸対称構造物として有限要素法を用いて行った。

2. 解析手法

(i) 定義と仮定

円筒座標系 (r, z, θ) をとり、荷重、変位および剛性の各成分をフーリエ級数で展開する (図-1)。

円方向の単位長さ当りの荷重は次のように表わされる。

$$\left. \begin{aligned} R &= \sum_{n=0}^{\infty} \bar{R}^n \cos n\theta + \sum_{n=1}^{\infty} \bar{R}^n \sin n\theta \\ z &= \sum_{n=0}^{\infty} \bar{z}^n \cos n\theta + \sum_{n=1}^{\infty} \bar{z}^n \sin n\theta \\ T &= \sum_{n=0}^{\infty} \bar{T}^n \sin n\theta + \sum_{n=1}^{\infty} \bar{T}^n \cos n\theta \end{aligned} \right\} \text{----- (1)}$$

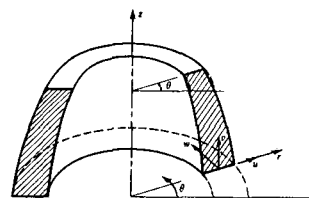


図-1

また、要素内の一般変位は、要素の形状関数を $N'_1, N'_2, \dots$ とすれば、つぎのように表わされる。

$$\left. \begin{aligned} u &= [N'_1 \ N'_2 \ \dots] \left\{ \begin{array}{c} \sum_{n=0}^{\infty} \bar{u}_1^n \cos n\theta \\ \sum_{n=0}^{\infty} \bar{u}_2^n \cos n\theta \\ \vdots \end{array} \right\} + [N'_1 \ N'_2 \ \dots] \left\{ \begin{array}{c} \sum_{n=0}^{\infty} \bar{u}_1^n \sin n\theta \\ \sum_{n=0}^{\infty} \bar{u}_2^n \sin n\theta \\ \vdots \end{array} \right\} \\ v &= [N'_1 \ N'_2 \ \dots] \left\{ \begin{array}{c} \sum_{n=0}^{\infty} \bar{v}_1^n \cos n\theta \\ \sum_{n=0}^{\infty} \bar{v}_2^n \cos n\theta \\ \vdots \end{array} \right\} + [N'_1 \ N'_2 \ \dots] \left\{ \begin{array}{c} \sum_{n=0}^{\infty} \bar{v}_1^n \sin n\theta \\ \sum_{n=0}^{\infty} \bar{v}_2^n \sin n\theta \\ \vdots \end{array} \right\} \\ w &= [N'_1 \ N'_2 \ \dots] \left\{ \begin{array}{c} \sum_{n=0}^{\infty} \bar{w}_1^n \sin n\theta \\ \sum_{n=0}^{\infty} \bar{w}_2^n \sin n\theta \\ \vdots \end{array} \right\} + [N'_1 \ N'_2 \ \dots] \left\{ \begin{array}{c} \sum_{n=0}^{\infty} \bar{w}_1^n \cos n\theta \\ \sum_{n=0}^{\infty} \bar{w}_2^n \cos n\theta \\ \vdots \end{array} \right\} \end{aligned} \right\} \text{----- (2)}$$

さらに、剛性も一般の場合、

$$[D(\theta)] = \left[\begin{array}{cccccc} E_{11}(\theta) & E_{12}(\theta) & E_{13}(\theta) & 0 & 0 & 0 \\ & E_{22}(\theta) & E_{23}(\theta) & 0 & 0 & 0 \\ & & E_{33}(\theta) & 0 & 0 & 0 \\ & & & G_{44}(\theta) & 0 & 0 \\ \text{Sym.} & & & & G_{55}(\theta) & 0 \\ & & & & & G_{66}(\theta) \end{array} \right] \text{----- (3)}$$

の形を持ち、等方性の場合には三次元弾性論の公式より次のように表わされる。

$$\left. \begin{aligned} E_{11} &= E_{22} = E_{33} = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta) (2\mu + \lambda) \\ E_{12} &= E_{13} = E_{23} = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta) \lambda \\ G_{44} &= G_{55} = G_{66} = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta) \mu \end{aligned} \right\} \text{----- (4)}$$

ここで、
 $\mu = E/2(1+\nu)$, $\lambda = 2\nu\mu/(1-2\nu)$

E: 弾性係数, ν : ポアソン比

とする。

(ii) 釣合方程式

図-2 に示すリング要素に仮想仕事の原理を適用すると、次の釣合方程式が得られる。(以下に用いる記号^eは代表的な要素に対する表示を意味する。)

$$\int_0^{2\pi} (\{\delta^*\}^e)^T \{F\}^e r d\theta = \int_V (\{\varepsilon^*\}^e)^T \{\sigma\}^e d(\text{vol}) \quad \text{----- (5)}$$

これは、最終的につぎの式となる。

$$\{F\}^e = [K]^e \{\delta\}^e \quad \text{----- (6)}$$

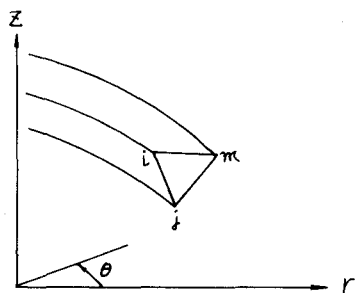


図-2

(iii) 熱応力解析

いま、要素の重心位置での温度分布が次式で表わされるものとする。

$$T(r, z, \theta, t) = \sum_{n=0}^{\infty} [T_{nc}(r, z, t) \cos n\theta + T_{ns}(r, z, t) \sin n\theta] \quad \text{----- (7)}$$

時刻 t^{k-1} から t^k までの温度変化による自由膨張ひずみ ε_0 を考え、 α を線膨張係数とすれば、

$$\{\varepsilon_0\}^e = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{r,0}(r, z, \theta, t) \\ \varepsilon_{z,0}(r, z, \theta, t) \\ \varepsilon_{\theta,0}(r, z, \theta, t) \\ \gamma_{rz,0}(r, z, \theta, t) \\ \gamma_{r\theta,0}(r, z, \theta, t) \\ \gamma_{z\theta,0}(r, z, \theta, t) \end{Bmatrix}^e = \alpha \begin{Bmatrix} T^k(r, z, \theta, t) - T^{k-1}(r, z, \theta, t) \\ T^k(r, z, \theta, t) - T^{k-1}(r, z, \theta, t) \\ T^k(r, z, \theta, t) - T^{k-1}(r, z, \theta, t) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}^e \quad \text{----- (8)}$$

となる。いま仮りに、要素内のひずみ $\{\varepsilon_0\}^e$ を拘束して、ひずみ状態を温度変化以前の状態に置いておくものとする。拘束により要素内に生じる応力 $\{\sigma_0\}$ は、

$$\{\sigma_0(r, z, \theta, t)\}^e = [D(\theta)]^e \{-\varepsilon_0(r, z, \theta, t)\}^e \quad \text{----- (9)}$$

となる。今度は逆に、 $-\{\sigma_0\}$ を発生させるために必要な各節点の等価節点力を求める。

$$\{F\}^e = \int_V ([B]^e)^T [D(\theta)]^e \{\varepsilon_0\}^e d(\text{vol}) \quad \text{----- (10)}$$

$[B]^e$: ひずみ-変位マトリックス

節点力を構造系全体で重ね合わせた時の各節点力を $\{F_i\}$ とすると、構造系全体について、

$$\{\delta_i\} = [K]^{-1} \{F_i\} \quad \text{----- (11)}$$

式(11)より、 $\{\delta_i\}^e$ を求め、

$$\{\sigma_i\}^e = [D(\theta)]^e [B]^e \{\delta_i\}^e \quad \text{----- (12)}$$

これより、 $\{\sigma_i\}^e$ が求められ、次式によって熱応力が計算されることになる。

$$\{\sigma\}^e = \{\sigma_0\}^e + \{\sigma_i\}^e \quad \text{----- (13)}$$

3. あとがき

本解析手法は、荷重分布と剛性変化がなだらかで、級数項数が少なくても済む場合に、一般の三次元要素を用いた場合と比較して、計算機容量、計算時間およびデータ数が減少し有利である。なお、本解析法を用いて行った実構造物の熱応力計算結果は発表当日に示す予定である。

参考文献 Zienkiewicz, O. C. and Cheung, Y. K.: Finite Element Method in Structural and Continuum Mechanics, McGraw-Hill, 1977