

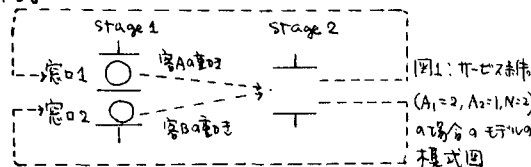
京都大学工学部 正員 吉川 和広

京都大学工学部 正員 香名 攻

日本工務株式会社 正員 O 井上 浩作雄

1. はじめに

本研究では、タンクトラックによる屋工作業のように、作業の繰り返される作業過程を図1のように模式的に示した待ち行列モデルとしてとらえて分析した。この待ち行列モデルのstage2では、乗削工の積みかきサービスで、stage1では佐路工→移工→復路帰車という作業のカーブスの状態を表わしている。従来は実際の現象のカーブスの時間分布が指数分布あるいはアーラン分布に近似できる場合にのみ、システムの推移する状態を連立微分方程式によって定式化し、各状態確率を計算して数値解を得ていた。ここで考察した解析法は従来の方法では解けなかった一般カーブスに就いてCyclic-Queueモデルを複合方程式を導入することによって解析しようとしたものである。



2. 解析法の概要

まず複合方程式を用いたCyclic-Queueモデルの解析の方法の基本的構成を説明するためにStage1の窓口数(A1)が2、Stage2の窓口数(A2)が1で系内人数(N)が2の場合のモデルを例にとって説明することにする。(以下ではこのようなカーブス条件を記号化して(A1=2, A2=1, N=2)と記することにする。)なおシステムの推移を時間的に連続にとらえて解析することが困難であるために、微小な単位時間Bごとの時間の経過(t=nB, n=0, 1, 2, ...)をもっと近似化することにした。

さて客がt=nBにおいて一般カーブスを受けている場合の遷移においては、この客が微小時間B内にカーブスを終了する確率を、その窓口で居る継続的に受けているカーブス時間S (S=0, B, ..., nB)によって異なることを認めることが必要である。そこで本研究ではまず時刻t=0においてStage1の2つの窓口(窓口1, 窓口2)を2人の客(客A, 客B)がカーブスを受けている状態を初期状態と

設定することから解析を始める。以下ではこのうちStage1の窓口1でカーブスを受けている客Aが、時間の経過に従ってStage1→Stage2→Stage1→...とカーブスを循環的に受けていく過程を一種の再生過程としてとらえてこのB時間ごとの時間経過に対して時刻t=nBにStage1, Stage2のカーブスを終了する客の割合x(nB), y(nB)と状態確率の変化を逐次解析していくのである。(x(nB), y(nB)の求め方は3.2述べる。)ここで時刻t=nB以前の各時刻における状態確率を解析されておれば、これからB時間後に各Stageのカーブスを終了する客の割合x{(n+1)B}とy{(n+1)B}を計算することが出来る。そしてこの再生状態における各Stageに流入する客の割合を同時に計算することによって、過程継続的に受けてきたカーブス時間長ごとの再生状態の割合を求める。さらにこの割合を用いて、時刻t=nBからB時間内の推移確率を求め、次の時刻t=(n+1)Bにおける状態確率を計算するのである。このような手順をB時間ごとの時間の経過に対して逐次繰返していくことにより、各再生状態の値が一一定値に収束するので、これらで定常解として求めるのである。x(nB)およびy(nB)の定式化

時刻t=0においてStage1の窓口1でカーブスを受けている客Aの数を1とした場合、任意の時刻t=nBにStage1にあるいはStage2のカーブスを終了する客Aの割合をx(nB), y(nB)と定義すると、これらは次式を満足する。

$$0 \leq x(nB) \leq 1, 0 \leq y(nB) \leq 1, (n=0, 1, 2, \dots) \quad (1)$$

まずx(nB)について考えると時刻t=nBにStage1のカーブスを終了する事象を次の2つの排反な事象に分けて考えることが出来る。

事象1: 時刻t=0からt=(n-1)Bまで継続してStage1でカーブスを受けており、時刻t=nBに窓口2のStage1のカーブスを終了する事象。この事象に従ってStage1を終了する客の割合はStage1のカーブス時間の分布の

確率変数関数 $f_i(z)$ と用いると $f_i(nB)$ と表わされる。
 事象2: 時刻 $t = nB$ 以前の時刻 $t = iB$ に付くとき1
 回以上 stage1 の π -バスに受けた客が stage2 の π -バス
 に終了後、再び stage1 の窓口に戻り、時刻 $t = nB$ 以上の
 π -バスに受ける事象。

この時刻 $t = iB$ において生じ得る状態を考えると、この
 事象2は客Aから客Bに stage2 の π -バスに受ける事
 象2-1と、客Bから客Aに先行して stage2 の π -バスに
 受けるために待ち行列を作る後に stage2 の π -バスに
 受ける事象2-2とに分けて考えることが出来る。客
 Aが stage1 の π -バスに終了して stage2 に流入した時
 刻 $t = iB$ に客Aが stage1 の π -バスに終了するとい
 う条件のもとで上の2つの事象の生じ得る確率を $\lambda_{20}(iB)$
 $\lambda_{21}(s, iB)$ ($s=0, B, \dots, iB$) と定義するとこれらは次の
 ようにあらわすことが出来る。

$$\lambda_{20}(iB) + \sum_{s=0}^{iB} \lambda_{21}(s, iB) = 1 \quad (i=0, B, \dots, nB) \quad (2)$$

この事象2-2が生じ得る場合客Aの待ち時間分布は、
 stage2 に先行して π -バスに受ける客Bの π -バス時
 間分布と一致する。この分布は時刻 $t = iB$ 以前に既に結
 核的に s 時間 π -バスに受けた客からその後 s 時間に s
 π -バスに受ける確率 $f_s(s, iB)$ に従うことがわかる。
 事象2の場合、客Aが stage1 の π -バスに終了した時
 刻 $t = iB$ 以後に stage1 に受ける時刻 $t = nB$ まで、
 $t = (n-i)B$ 時間が経過する。この t 時間内に客Aが
 stage2 と stage1 の π -バスに受ける確率は stage2
 の待ち時間の確率 $f_2(s, iB)$ と stage2 から stage1
 の π -バス時間の確率 $f_1(z)$ と $f_1(z)$ により n 回計算
 出来る。以上のことから $X(nB)$ は次のように表式化可
 ることが出来る。

$$X(nB) = f_1(nB) + \sum_{i=0}^{(n-1)B} X(iB) [\lambda_{20}(iB) f_{21}\{(n-i)B\} \\ + \sum_{s=0}^{iB} \lambda_{21}(s, iB) f_{21}\{s, (n-i)B\}] \quad (3)$$

ここで $f_{10} = f_1 * f_1, f_{21} = f_2(s, iB) * f_1 * f_1$ ($*$ は関数と z と iB と z
 に対してあらわしている)。
 また $Y(nB)$ は時刻 $t = iB$: stage1 に受けた客が $t =$
 $(n-i)B$ 時間において stage2 に受ける確率を計算可
 る。このようにして次のように表式化出来ること
 が出来る。

$$Y(nB) = \sum_{i=0}^{(n-1)B} X(iB) [\lambda_{20}(iB) f_2\{(n-i)B\} + \\ \sum_{s=0}^{iB} \lambda_{21}(s, iB) f_{22}\{s, (n-i)B\}] \quad (4)$$

4. 時刻 $t = nB$ における遷移確率の求め方

時刻 $t = nB$ において生じ得る状態を各 stage にいる客
 の組合せによって分ける。また stage2 の π -バスに

受けている客について、さらに顧客の属性によって分
 けて π -バス時間 S ($s=0, B, \dots, nB$) によって $(n+1)$ 通りに分
 けて考える。この単位時間 B を無視にとると、この B 時
 間内では1人の客はせいぜい1つの stage の π -バス
 に受けるし、受けるしと仮定出来る。時刻 $t = nB$ において上
 記の各状態遷移が既知であると各 stage の π -バスに
 受けていて客がその後 B 時間内に受ける確率は既に結
 核的に受けてきた π -バス時間から決まっているので簡単
 に求めることが出来る。従って B 時間内に生じ得る客
 の属性の組合せを考えると、各状態遷移間の遷移確率を計算
 することが出来る。時刻 $t = (n+1)B$ における状態遷移
 を計算することが出来る。

以上を簡単に述べた手順を用いると ($A_1=2, A_2=1, N=2$)
 の π -バス条件をもつ Cyclic-Queue について計算可
 行なことが出来る。以下では π -バス条件を拡張した場
 合にどのように解けるかを説明出来るように述べる。
 ことである。

5. 両 stage を待ち行列が生じる場合

時刻 $t = iB$ において stage1 の π -バスに受けた
 客のうち t 時間 (iB, nB) における任意の時刻 $t = jB$ に sta
 ge2 に受けた客が stage1 に流入する客について考える。
 この時刻 $t = iB$ において $\lambda_{20}(iB), \lambda_{21}(s, iB)$ と考えるこ
 とは、この時刻 $t = jB$ でも stage1 の π -バスに受けた
 客が stage2 に受ける確率と待ち行列を作る事象に分けて、この排
 他な事象の生じ得る確率を計算出来る。

6. 各 stage の窓口数、系内人数が増加した場合

stage1 は窓口の π -バスは互いに独立であるから
 stage1 の窓口の π -バスに受けた客が stage2 に受けた客
 の待ち時間 t によって決まる。また待ち時間分布は客が各 stage の π -バスに受けた後、他方の
 stage に流入した際に先行して π -バスに受ける。客が
 到着して t 時間 $t = iB$ まで $f_1(z)$ である。また $f_2(z)$ の数を変
 化せしめなければならないことは明らかである。

7. おわりに

以上の方法によって一般 π -バス2つの場合の 2 stage
 Cyclic-Queue の定常解を求めることを示した。本
 論文の関心は計算結果とその精度について今後の課題に
 ついては後述の通りである。

参考文献: 井上浩一雄 修士論文、積分方程式による
 2 stage π -バス2つのモデルの定式化と解法に関する研究 1978