Ⅳ－167　三辺測量の図形調整法における従来の条件式数を示す公式が誤りであることの証明

山形工業高等学校　正会員　町田憲一

まえがき

三辺測量の図形調整法による調整の条件式の数は、次式で表わされているのが定説である。

条件式数 ＝ $m - 2S + 3$　　但し m：測定辺長数 、S：三角点数

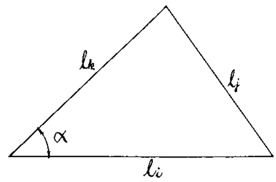
例えば、Fig.2の6辺を測定した四辺形では $m=6$、$S=4$、従って条件式数は1個ということになる。しかし、筆者は以前より多数の三辺測量の数値計算を実施してこれに疑問を持ち続けていた。本研究はこの点を理論的に究明し、図形として四辺形を例にとり表題の証明をし、従来の定説の誤りを指摘するものである。

証　明

この証明の骨子となる交角の誤差方程式について説明する。Fig.1のような三辺を測定した三角形に於て、l_i、l_j、l_kを距離の測定値、v_i、v_j、v_kの各々をその補正量とすれば、交角αの補正量δは次式で表わせる（誘導省略）。

$$\delta = \frac{1}{\sin\alpha}\left\{-\left(\frac{l_i^2 - l_k^2 + l_j^2}{2 l_i^2 l_k}\right)v_i + \left(\frac{l_j}{l_i l_k}\right)v_j - \left(\frac{-l_i^2 + l_k^2 + l_j^2}{2 l_i l_k^2}\right)v_k\right\}$$

但しαは次の値である（第二余弦法則より）。　$\alpha = \cos^{-1}\left(\dfrac{l_i^2 + l_k^2 - l_j^2}{2 l_i l_k}\right)$



（Fig. 1）

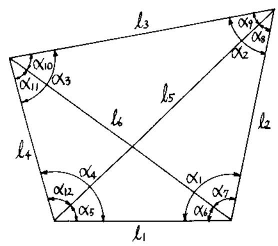
上式のv_i、v_j、v_kの係数を各々A、B、Cと置けば次式を得る。

$$\delta = A v_i + B v_j + C v_k \quad \text{------------①}$$

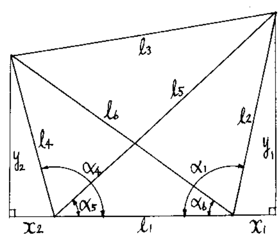
①式がこの証明の基本式であり以下これを交角の誤差方程式と呼ぶことにする。

①式の各々の係数は、理屈を抜きにして次のように機械的に求めればよい。

> v_iの係数 A：$\alpha = \cos^{-1}\left(\dfrac{l_i^2 + l_k^2 - l_j^2}{2 l_i l_k}\right)$ の（　）内のl_k^2とl_j^2の符号を変えて $-1/\sin\alpha\, l_i$ を掛けた値
>
> v_jの係数 B：$\dfrac{l_j}{\sin\alpha\, l_i l_k}$ の値
>
> v_kの係数 C：$\alpha = \cos^{-1}\left(\dfrac{l_i^2 + l_k^2 - l_j^2}{2 l_i l_k}\right)$ の（　）内のl_i^2とl_j^2の符号を変えて $-1/\sin\alpha\, l_k$ を掛けた値



（Fig. 2）



（Fig. 3）

以下、Fig.2のような6辺の距離を測定した四辺形の満足すべき独立な条件式が、少なくとも二個存在することを証明する。但し記号は次のものを用いる。

（$l_1 \sim l_6$：距離の測定値 、$v_1 \sim v_6$：距離の補正量 、$\alpha_1 \sim \alpha_{12}$：第二余弦法則により$l_1 \sim l_6$から求められる交角 、$\delta_1 \sim \delta_{12}$：交角の補正量（ラジアン）、$\alpha_{01} \sim \alpha_{012}$：交角の最確値　（$\alpha_{0n} = \alpha_n + \delta_n$ 、但し $n = 1 \sim 12$））

今、条件式として次の2式を挙げ、これらは別個の独立した条件式であることを証明する。

$$\alpha_{01} + \alpha_{02} + \alpha_{03} + \alpha_{04} = 360^\circ \quad \text{------②} ,\qquad \alpha_{06} + \alpha_{07} = \alpha_{01} \quad \text{------------③}$$

②、③式より次式を得る。

$$\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \delta_4 + \varepsilon_1 = 0 \quad \text{----------④} ,\qquad \alpha_6 + \alpha_7 - \alpha_1 + \varepsilon_2 = 0 \quad \text{----------⑤}$$

但し　$\varepsilon_1 = (\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4 = 360^\circ)/206265''$　、　$\varepsilon_2 = (\alpha_6+\alpha_7-\alpha_1)/206265''$　である。

一方、①式より各交角の誤差方程式は次のようになる。

$$\left.\begin{array}{lll} \delta_1 = A_1 v_2 + B_1 v_5 + C_1 v_1 \ , & \delta_2 = A_2 v_3 + B_2 v_6 + C_2 v_2 \ , & \delta_3 = A_3 v_4 + B_3 v_5 + C_3 v_3 \\ \delta_4 = A_4 v_1 + B_4 v_6 + C_4 v_4 \ , & \delta_6 = A_6 v_6 + B_6 v_4 + C_6 v_1 \ , & \delta_7 = A_7 v_2 + B_7 v_3 + C_7 v_6 \end{array}\right\} \quad \text{------⑥}$$

但し⑥式中の A_n、B_n、C_n　（ $n = 1 \sim 4, 6, 7$ ）は前述した機械的方法により得られる値である。

⑥式を④、⑤式に代入して整理すれば次式を得る。

$$(C_1+A_4)v_1 + (A_1+C_2)v_2 + (A_2+C_3)v_3 + (A_3+C_4)v_4 + (B_1+B_3)v_5 + (B_7+B_4)v_6 + \varepsilon_1 = 0 \quad \text{--⑦}$$

$$(-C_1+C_6)v_1 + (-A_1+A_7)v_2 + B_7 v_3 + B_6 v_4 - B_1 v_5 + (A_6+C_7)v_6 + \varepsilon_2 = 0 \quad \text{----------⑧}$$

さらに、⑦、⑧式の各補正量の係数を各々 D_j、E_j（ $j = 1 \sim 6$ ）と置けば次の誤差方程式を得る。

$$D_1 v_1 + D_2 v_2 + D_3 v_3 + D_4 v_4 + D_5 v_5 + D_6 v_6 + \varepsilon_1 = 0 \ \text{-⑨} \ , \quad E_1 v_1 + E_2 v_2 + E_3 v_3 + E_4 v_4 + E_5 v_5 + E_6 v_6 + \varepsilon_2 = 0 \ \text{-⑩}$$

⑨式に対して最小2乗法（未定係数法）を適用すれば、未定係数を $-2K_1$ として　$\varphi \equiv [v^2] - 2K_1$(⑨式) = minimum なるように v_j（ $j = 1 \sim 6$ ）を決めればよい。φ は v_j の関数であるから $\partial\varphi/\partial v_j = 0$　より次式を得る。

$$v_1 = K_1 D_1 \ , \quad v_2 = K_1 D_2 \ , \quad v_3 = K_1 D_3 \ , \quad v_4 = K_1 D_4 \ , \quad v_5 = K_1 D_5 \ , \quad v_6 = K_1 D_6 \quad \text{----------⑪}$$

同様に⑩式に最小2乗法を適用して次式を得る。

$$v_1 = K_2 E_1 \ , \quad v_2 = K_2 E_2 \ , \quad v_3 = K_2 E_3 \ , \quad v_4 = K_2 E_4 \ , \quad v_5 = K_2 E_5 \ ; \quad v_6 = K_2 E_6 \quad \text{----------⑫}$$

但し K_1、K_2 は次の値である。

$$K_1 = -\varepsilon_1 / [D_j^2] \quad \text{-----⑬} \ , \quad K_2 = -\varepsilon_2 / [E_j^2] \quad \text{----------⑭}$$

然して、条件式②から出発した⑪式より得られる各補正量と、条件式③から出発した⑫式より得られる各補正量は一致しない（一致する確率が0である）ことを示せばよい。　Fig.3を参照して D_1、E_1 は次のようになる。

$$D_1 = C_1 + A_4 = -(-l_2^2 + l_1^2 + l_5^2)/2\sin\alpha_1 l_2 l_1^2 - (l_1^2 - l_4^2 + l_6^2)/2\sin\alpha_4 l_1^2 l_4 = -\cos\alpha_5 l_5 / l_2 l_1 \sin\alpha_1$$
$$- \cos\alpha_6 l_6 / l_1 l_4 \sin\alpha_4 = -(l_1 + x_1)/l_1 y_1 - (l_1 + x_2)/l_1 y_2 = -(y_1 l_1 + y_1 x_2 + y_2 l_1 + y_2 x_1)/l_1 y_1 y_2$$

$$E_1 = -C_1 + C_6 = (l_1 + x_1)/l_1 y_1 - (-l_6^2 + l_1^2 + l_4^2)/2\sin\alpha_6 l_6 l_1^2 = (l_1 + x_1)/l_1 y_1 - \cos\alpha_4 l_4 / l_6 l_1 \sin\alpha_6$$
$$= (l_1 + x_1)/l_1 y_1 + x_2 / l_1 y_2 = (y_1 x_2 + y_2 l_1 + y_2 x_1)/l_1 y_1 y_2$$

（但し C_1、A_4、C_6 は前述した機械的方法により求めた値である）

従って $D_1 \neq E_1$　となる。同様にして他の D_j と E_j も異ることがわかる（省略）。よってこれら D_j、E_j の2乗の和である $[D_j^2]$ と $[E_j^2]$ の値もまた一致しない（一致する確率が0である）ことを証明できる。それは次のように考えればよい。即ち、$[D_j^2]$ と $[E_j^2]$ が一致する E_6^2 は、$[D_j^2]$（ $j = 1 \sim 6$ ）と $[E_j^2]$（ $j = 1 \sim 5$ ）に対してただ1個対応するが一致しない E_6^2 は無限に存在する。従って $[D_j^2]$ と $[E_j^2]$ が一致する確率は $1/\infty = 0$ である。

また、④、⑤式の ε_1、ε_2 は同じ値をとる場合も異なる場合もあり得る。

従って⑬、⑭式の K_1、K_2 が一致する $[E_j^2]$ は、ε_1、$[D_j^2]$、ε_2 に対してただ1個対応するが一致しない $[E_j^2]$ は無限に存在する。故に K_1、K_2 が一致する確率は0である。

さらに、⑪、⑫式から得られる　$v_j = K_1 D_j$　、　$v_j = K_2 E_j$　が一致する K_2 は、K_1、D_j、E_j に対してただ1個対応するが一致しない K_2 は無限に存在する。従って v_j が一致する確率は0である。尚、確率の証明の処は数学的にもっと厳密に行うには集合論によればよい。

結局、条件式②、③より得られる補正量は異るものである以上、この2式は全く独立した（一方をもって他方に代えることのできない）条件式でなければならない。故に四辺形の調整の条件式は1個のみでないことがわかり、従来の条件式数を示す公式は誤りであることが証明される。

あとがき

今後は四辺形に限らず一般の図形に対する図形調整法の必要十分な条件式数を示す公式の確立を急がなければならないものと考える。この研究がこの問題の解決の糸口になれば幸である。