Ⅳ-56　勾配射影法による等時間原則交通量配分の計算法

岡山大学工学部　正員　井上博司

1．はじめに

需要交通量が固定され，走行時間が交通量に依存するという前提のもとで，各自動車が起終点間の走行時間最短の経路を選択するときに生じる道路網上の自動車交通流の分布を求める問題，いわゆる等時間原則による交通量配分の計算法を提案するものである。

本研究では走行時間が交通量の非線形単調増加関数として表わされると仮定し，等時間原則交通量配分を非線形最適化問題として解く。解法には線形制約条件付非線形最適化問題の有力な解法であるローゼンの勾配射影法および共役勾配射影法を用いる。

2．定式化

ODペアーiの需要交通量をS^i，ODペアーiの第k番目の経路を流れる交通量をx_k^i，またODペアーiの第k番目の経路がリンクjを経由するとき$\delta_{kj}^i=1$，経由しないときには$\delta_{kj}^i=0$とする。

またリンクjを走行するのに要する所要時間T_jは，リンクjの上の交通量X_jに関する単調増加関数として$T_j=f_j(X_j)$と表わされると仮定する。このとき等時間原則による交通量配分は次の問題と等価である。

制約条件　$\sum_k x_k^i = S^i$　$(i=1,2,\cdots\cdots,\ell)$

$x_k^i \geqq 0$　$(i=1,2,\cdots\cdots,\ell;\ k=1,2,\cdots\cdots,n^i)$

のもとで目的関数

$$F = \sum_j \int_0^{\sum_i\sum_k \delta_{kj}^i x_k^i} f_j(X_j)\,dX_j$$

を最小にせよ。

3．ローゼンの勾配射影法の適用

上記の最小化問題は，ある特定のODペアー以外の変数値をすべて固定し，特定のODペアーの変数のみを動かして最小化を実行し，逐次このような計算をODペアーを遷移させながら行ういわゆるレラクセーションの方法によって解くことができる。勾配射影法はそれぞれ特定のODペアーについての最小化で適用される。

ローゼンの勾配射影法では，目的関数の勾配（最大傾斜方向）を効いている制約条件で構成される凸多面体の上に射影する。この射影によって使用可能で実行可能な方向が決定され，その方向への最小化が実行される。この探索によって有効な制約条件が変えられるなら，新しい射影マトリクスが計算され，次の探索の方向が同じようにして決定されるのである。最適性の判定にはKuhn-Tucker条件が用いられる。

いまある特定のODペアーについて経路を並べかえて，ゼロフロー経路を$1,2,\cdots\cdots,q$，ポジティブフロー経路を$q+1,q+2,\cdots\cdots,q+r$とすると，ローゼンによる射影マトリクスは次のように求められる。

$$P_S = E - A_S[A_S^T A_S]^{-1}A_S^T = \begin{array}{c|c|cccc|}
 & 1\ 2\ \cdots\ q & q+1 & q+2 & \cdots & q+r \\ \hline
1,2,\cdots,q & O & & O & & \\ \hline
q+1 & & 1-\frac{1}{r} & -\frac{1}{r} & \cdots & -\frac{1}{r} \\
q+2 & O & -\frac{1}{r} & 1-\frac{1}{r} & \cdots & -\frac{1}{r} \\
\vdots & & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
q+r & & -\frac{1}{r} & -\frac{1}{r} & \cdots & 1-\frac{1}{r}
\end{array}$$

アルゴリズムの第k番目のステップは次のようにまとめられる。

(1) 勾配 g_k とその射影 $P_q g_k$ を計算する。
(2) もし $P_q g_k \neq 0$ なら $d_k = -P_q g_k$ とおき (6) へ。
(3) もし $P_q g_k = 0$ なら $\alpha = [A_s^T A_s]^{-1} A_s^T g_k$ を計算する。
(4) もし $\alpha \geqq 0$ なら x_k は解である。
(5) もし $\alpha_j < 0$ があれば $\alpha_\theta = \min_j \alpha_j$ を求め，a_θ を A_s から除外する。新しい射影マトリクス P_{q-1} を計算して (1) にもどる。
(6) $\lambda_j = -X_j/d_j$ (jはポジティブフロー経路) に対して $\lambda_k = \min_j \{\lambda_j > 0\}$ を求める。
(7) もし $F(x_k + \lambda_k d_k) < F(x_k)$ なら，$x_{k+1} = x_k + \lambda_k d_k$ とおき，a_k を A_s に加える。
(8) もし $F(x_k + \lambda_k d_k) \geqq F(x_k)$ なら，$0 \leqq \lambda \leqq \lambda_k$ のもとで $F(x_k + \lambda d_k)$ を最小にする λ を見つけ，$x_{k+1} = x_k + \lambda d_k$ とおく。(1) にもどる。

4. 共役勾配射影法の適用

ラピダス，ゴールドファーブによる共役勾配射影法では，可変計量方向 (Variable Metric Direction) が凸多面体の上に射影される。このため探索の方向が使用可能で実行可能であるばかりでなく，互いに共役であるという性質があり，数少いステップで最適化が実行できるのである。

アルゴリズムの才k番目のステップは次のようになる。

(1) 勾配 g_k とその射影 $H_q^k g_k$ を計算する。(最初のステップでは $H = E$ とおく。)
(2) $\alpha = [A_s^T A_s]^{-1} A_s^T g_k$ を計算する。
(3) もし $H_q^k g_k = 0$ で $\alpha \geqq 0$ なら x_k は解である。
(4) もし $H_q^k g_k \neq 0$ で $\alpha \geqq 0$ なら (6) へ。
(5) もし $\alpha_j < 0$ があれば $b_{jj} = (1 + \frac{1}{j})$ とおき，$\alpha_\theta = \min_j \alpha_j$ を見つける。
もし $\| H_q^k g_k \| > -\frac{1}{2}\alpha_\theta b_{\theta\theta}^{-\frac{1}{2}}$ なら (6) へ。もし $\| H_q^k g_k \| \leqq -\frac{1}{2}\alpha_\theta b_{\theta\theta}^{-\frac{1}{2}}$ なら a_θ を A_s から除外し，新しい射影マトリクス P_{q-1} を計算する。

$$H_{q-1}^k = H_q^k + \frac{P_{q-1} a_\theta a_\theta^T P_{q-1}}{a_\theta^T P_{q-1} a_\theta}$$

とおき，(1) へもどる。

(6) $d_k = -H_q^k g_k$ を計算し，$\lambda_j = -X_j/d_j$ (jはポジティブフロー経路) に対して $\lambda_k = \min_j \{\lambda_j > 0\}$ を見つける。
(7) $0 \leqq \lambda \leqq \lambda_k$ のもとで，$F(x_k + \lambda d_k)$ を最小にする λ を見つける。$x_{k+1} = x_k + \lambda d_k$，$\sigma_k = \lambda d_k$ とおき，勾配 g_{k+1} を計算する。
(8) もし $\lambda = \lambda_k$ かつ $(d_k)^T g_{k+1} \leqq 0$ なら a_k を A_s に加える。

$$H_{q+1}^{k+1} = H_q^k - \frac{H_q^k a_j a_j^T H_q^k}{a_j^T H_q^k a_j}$$

とおき，(1) にもどる。

(9) $y_k = g_{k+1} - g_k$ とおき，H_q を次のように改良し (1) にもどる。

$$H_q^{k+1} = H_q^k - \frac{\sigma_k (\sigma_k)^T}{(\sigma_k)^T y_k} - \frac{H_q^k y_k (y_k)^T H_q^k}{(y_k)^T H_q^k y_k}$$

5. おわりに

ローゼンの勾配射影法のアルゴリズムは，等時間原則による交通量配分として明解な意味づけを行うことができる。しかし共役勾配射影法についてはあまり明解ではない。共役勾配射影法はその計算が複雑であるという欠点があるが，数少いステップで最適点に致るというめざましい長所がある。