IV-42　均衡モデルによる交通量の区間推定法

岐阜大学工学部　正員　宮城俊彦
岐阜大学工学部　正員　加藤　晃

1. はじめに

将来の交通量推定は交通モデルを用いて行なわれるが，推定値は種々の要因により誤差をもつ。これを大別すると，(1) モデルビルディングの際の誤差　(2) 将来の不確実性に伴う誤差が考えられる。(1)はモデルの理論的構造の誤り，あるいは入力データそのものが誤差をもつ等の理由により生じる。(2)は，(1)とも関連するが大きくは時間的推移に伴う母集団の変化によりモデルパラメータの信頼性が薄くなることを意味している。すなわち，(1)は推定に伴う誤差であり，(2)は得られたモデルをそのまま将来時点に適用することの信頼性の低下である。したがって，従来の方法のように将来交通量を点推定という形で与えるのは無理があり，利用するモデルに応じた区間推定法を採るべきであろう。本稿は将来推定値の誤差構造が説明変数やパラメータの誤差構造とどのように係わっているのかを明らかにすると同時に，均衡モデルによる交通量推定に対し，その信頼区間を与える分析的方法について考察したものである。

2. 予測モデルの誤差構造

説明変数 $x_1, x_2, \cdots, x_p$ によって目的変数 y の値を次式によって求めるものとする。

$$y = f(x_1, x_2, \cdots, x_p) \tag{1}$$

関数 f の形は不明であるが，x_i に関し一次微分可能であると仮定する。また，x_i は推定量であり，真の値の付近でバラツキをもつ。式(1)で誤差項 ε が省略されているのは，現況データを利用して得られたモデルを理論モデルと見做して将来値推定に用いることを意味している。今，x_i の将来推定値（不偏推定量であると仮定する）x_i° が与えられたときの y の分散を求めてみよう。まず，式(1)を x_i° のまわりでテイラー展開すると，

$$y = f(x_1^\circ, x_2^\circ, \cdots, x_p^\circ) + \sum_i (x_i - x_i^\circ) \left.\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_{x_i = x_i^\circ} \tag{2}$$

ここで，2次以上の高次項は無視できるものとする。このとき，

$$\begin{aligned}\sigma_y^2 &= E\left[(y - E(y))^2\right] = E\left[\left(\sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_i - x_i^\circ)\right)^2\right] \\ &= E\left[\left(\sum_i (x_i - x_i^\circ)\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2\right] + 2\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=i+1}^{p} E\left[(x_i - x_i^\circ)(x_j - x_j^\circ)\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j}\right] \\ &= \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 \sigma_i^2 + 2\sum_{i=1}\sum_{j=i+1}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)\sigma_{ij}\end{aligned} \tag{3}$$

式(3)を用いて需要モデル，供給モデルの誤差構造を分析する。

たとえば，次のような需要モデルを想定してみよう。

$$X_{ij} = \alpha_0 P_i^{\alpha_1} E_j^{\alpha_2} C_{ij}^{\alpha_3} \tag{4}$$

ここに，X_{ij}：OD交通量　C_{ij}：所要時間　P_i：発生側人口　E_j：吸引側雇用者数

$\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$：パラメータ

このとき，

$$\begin{aligned}\sigma_{X_{ij}}^2 = \{ &\alpha_1^2 (\sigma_{P_i}/P_i)^2 + \alpha_2^2 (\sigma_{E_j}/E_j)^2 + \alpha_3^2 \sigma_{C_{ij}}^2 + (\sigma_{\alpha_0}/\alpha_0)^2 + (\log P_i)^2 \sigma_{\alpha_1}^2 + (\log E_j)^2 \sigma_{\alpha_2}^2 \\ &+ C_{ij}^2 \sigma_{\alpha_3}^2 + (\log P_i/\alpha_0)\sigma_{\alpha_0\alpha_1} + (\log E_j/\alpha_0)\sigma_{\alpha_1\alpha_0} + C_{ij}/\alpha_0\, \sigma_{\alpha_0\alpha_3} \\ &+ \log P_i \cdot \log E_j \cdot \sigma_{\alpha_1\alpha_2} + C_{ij} \log P_i \cdot \sigma_{\alpha_1\alpha_3} + C_{ij} \log E_j\, \sigma_{\alpha_2\alpha_3} \} X_{ij}^2\end{aligned} \tag{5}$$

式(5)の誘導に際し，説明変数の予測に関し，説明変数間及びパラメータと説明変数間の相関はないものとしている。ところで，P_i，E_j の相対誤差は経験的に判っているか，あるいは適当な基準が与えられるものとする。また，パラメータについては，時間的推移に伴う誤差が加わるが，ここではこれを無視し，現況データからのモデル設定の際に得られるものとする。したがって，$\sigma_{X_{ij}}^2$ は C_{ij}，$\sigma_{C_{ij}}^2$，X_{ij}^2 の関数として与えられる。均衡分析後は，C_{ij} と X_{ij} が既知量となるので，式(5)は次のようになる。

$$\sigma_{X_{ij}}^2 = \lambda_{ij} + \varphi_{ij}\,\sigma_{c_{ij}}^2 \quad , \quad \lambda_{ij}; \varphi_{ij} \text{：定数項} \tag{6}$$

次に，リンク走行時間モデルとしてB.P.R型を取り上げる．

$$C_j(x_j) = C_j(0)\{\alpha + (x_j / B_j)^{\beta}\} \tag{7}$$

$C_j(\cdot)$：リンク走行時間，B_j：リンク容量，x_j：リンク交通量，α, β：パラメータ

このとき，

$$\sigma_{c_{ij}}^2 = \{\sigma_\alpha^2 + (\beta/x_j)^2(x_j/B_j)^{2\beta}\sigma_{x_j}^2 + (\log x_j/B_j)^2(x_j/\beta)^2\sigma_\beta^2 + (\log x_j/B_j)(x_j/B_j)^{\beta}\sigma_{\alpha\beta}\}C_j^2(0)$$

今，簡単のため，一般性を失うことなく $\sigma_\alpha = \sigma_\beta = 0$ とおくと，

$$\sigma_{c_{ij}}^2 = w_j\,\sigma_{x_j}^2 \quad , \quad w_j = (\beta/x_j)^2(x_j/B_j)^{2\beta} \tag{8}$$

また，均衡モデルの最適解の条件より，

$$\sum_j \delta_{j,r}^{ij}\,C_j(x_j) = C_{ij} \quad , \quad if \quad x_r^{ij} > 0 \tag{9}$$

ここに，x_r^{ij}：ij 間の経路 r の交通量，$\delta_{j,r}^{ij}$：経路行列の要素

式(9)は，よく知られたWardropの第1原理を表わしている．式(8)，(9)より，

$$\sigma_{c_{ij},r}^2 = \sum_j \delta_{j,r}^{ij}\,w_j\,\sigma_{x_j}^2 \tag{10}$$

式(10)は，供給側から得られる所要時間の分散を与えたものであるが，各経路間の分散の一致性は保証されてない．また，リンク交通量の分散が与えられてはじめて $\sigma_{c_{ij},r}^2$ が求められるが，リンク交通量の分散は，OD交通量の分散が与えられないことには求まらず，また，OD交通量の分散は式(6)から明らかなように，所要時間の分散が与えられることが条件である．

3．交通量の区間推定法

各変量の分散を同時に求め，所要時間の分散の一致性を保証する問題を考える．まず，次のように変数を変換する．

$$\sigma_{X_{ij}}^2 \to X_{ij} \;,\; \sigma_{x_j}^2 \to x_j \;,\; \sigma_{c_{ij}}^2 \to C_{ij} \;,\; \sigma_{c_j}^2 \to c_j \;,\; \sigma_{x_r^{ij}}^2 \to x_r^{ij}$$

このとき，式(6)を新たな需要モデルと考え，また，式(8)を供給モデルと考えることによって，次のような均衡問題を得る．

$$\mathrm{Min} \; -\sum_{ij}\int_0^{X_{ij}} \left(-\frac{\lambda_{ij}}{\varphi_{ij}} + \frac{1}{\varphi_{ij}}X\right)dX + \sum_j \int_0^{x_j} w_j\,x\,dx$$

但し，次の関係を満足する必要がある．

$$\sum_r x_r^{ij} = X_{ij} \quad , \quad x_j = \sum_{ij}\sum_r \delta_{j,r}^{ij}\,x_r^{ij} \quad , \quad x_r^{ij} \geq 0$$

これは通常の均衡モデルであり，$X_{ij}\,(=\sigma_{X_{ij}}^2)$，$x_j\,(=\sigma_{x_j}^2)$，$C_{ij}\,(=\sigma_{c_{ij}}^2)$ を同時に求めることができる．

リンク交通量，OD交通量がともに正規分布すると仮定するならば，各変量の区間推定値は次のように与えられる．

$$\mu_{ij} = X_{ij} \pm K_r\,\sigma_{X_{ij}} \quad , \quad \mu_j = x_j \pm K_r\,\sigma_{x_j} \tag{11}$$

ここに，K_r は標準正規分布の $100\,r\%$ 点

つまり，需要モデルとして式(4)を用い，供給モデルとして(7)を用いた場合に，推定される各交通量は，$(1-r)\times100\%$ の信頼度で式(11)の範囲にあるといえる．

4．あとがき

Wardropの第一原理はあくまで期待値的に生ずる現象であり，分散が大きくなれば等時間原則が成立しない場合もありうることを理論的に示した．今後は，説明変数やパラメータのバラツキをどのように与えるべきか，あるいは，実測交通量を得た場合にそれがモデルの改良にどのように役立つのか等について，ここで得られた結果を応用していきたい．