

大阪大学工学部 正会員 松井 保
大阪大学工学部 正会員 ○ 阿部 信晴

1. まえがき

土、特に粘性土が顕著な時間依存性挙動を示すことは良く知られており、かつ、土構造物、基礎地盤の安定解析や変形解析上、その重要性が強く指摘されている。最近、この時間依存性をも考慮した構成関係式がいくつか提案されるようになってきた。そこで、本報告では弾-粘塑性有限要素解析のための応力～ひずみ関係式を一般的な形で誘導している。さらに、簡単な計算例を示してその有用性を検討したものである。

2. 応力～ひずみ関係

ここでは、降伏関数 F 及び塑性ポテンシャル Q は次の形式で与えられるものとする。

$$F = F(\sigma', \varepsilon_p, t, K) = 0, \quad Q = Q(\sigma', \varepsilon_p, t, K_0) = 0 \quad (1)$$

また、全ひずみ速度は弾性ひずみ速度と粘塑性ひずみ速度の和で表わされるものとする、すなわち、

$$\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}_e + \dot{\varepsilon}_p \quad (2)$$

等方弾性及び normality rule を仮定し、弾性ひずみ速度及び粘塑性ひずみ速度は、それぞれ次式で与えられるものとする。

$$\left. \begin{aligned} \dot{\varepsilon}_e &= D^{-1} \dot{\sigma}' \\ \dot{\varepsilon}_p &= \dot{\lambda} \frac{\partial Q}{\partial \sigma'} = \dot{\lambda} \bar{a} \end{aligned} \right\} (3) \quad \text{ここに、} \quad \bar{a} = \begin{bmatrix} \frac{\partial Q}{\partial \sigma'_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial Q}{\partial \sigma'_n} \end{bmatrix}$$

したがって、(2)は

$$\dot{\varepsilon} = D^{-1} \dot{\sigma}' + \dot{\lambda} \bar{a} \quad (4) \quad D: \text{弾性マトリックス}$$

粘塑性変形時においては次式が成立する。

$$\dot{F} = \left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma'} \right\} \dot{\sigma}' + \frac{\partial F}{\partial t} + \left\{ \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_p} \right\} \dot{\varepsilon}_p = 0 \quad (5)$$

いま、 $A = -\frac{1}{\dot{\lambda}} \left(\left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma'} \right\} \dot{\sigma}' + \left\{ \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_p} \right\} \dot{\varepsilon}_p \right)$ とおくと、(5)は、

$$\bar{a} \dot{\sigma}' + \frac{\partial F}{\partial t} - A \dot{\lambda} = 0 \quad (6)$$

(4)から、

$$\dot{\sigma}' = A \dot{\lambda} + \bar{b} \dot{\lambda} - \frac{\partial F}{\partial t} \quad (7) \quad \text{ここに、} \quad \bar{b} = D \bar{a}$$

(6)、(7)から

$$\bar{a} \dot{\sigma}' + \frac{\partial F}{\partial t} - A \dot{\lambda} = 0 \quad (8) \quad \bar{a} \bar{b} \dot{\lambda} = \bar{a} \dot{\sigma}'$$

したがって、(8)から $\dot{\lambda}$ は次式で与えられる。

$$\dot{\lambda} = \frac{\bar{a} \dot{\sigma}' + \frac{\partial F}{\partial t}}{A + \bar{b}} \quad (9)$$

(9)を(4)に代入して、

$$\dot{\sigma}' = D \dot{\varepsilon} - \frac{D \bar{a} \dot{\sigma}' + \frac{\partial F}{\partial t}}{A + \bar{b}} - \frac{D \bar{a} \left(\frac{\partial F}{\partial t} \right)}{A + \bar{b}} \quad (10)$$

左側の計算をおこなって、

$$\dot{\sigma}' = \left(D - \frac{D \bar{a} D^{-1}}{A + \bar{b}} \right) \left(\dot{\varepsilon} - \frac{\frac{\partial F}{\partial t} \bar{a}}{A} \right) = \left(D - \frac{D \bar{a} D^{-1}}{A + \bar{b}} \right) (\dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}^c) \quad (11)$$

(11)は応力、ひずみの速度に関して成り立つものであるが、微小時間増分 Δt 間における $\dot{\varepsilon}^c$ の増分と算定することにより増分計算が可能となる。

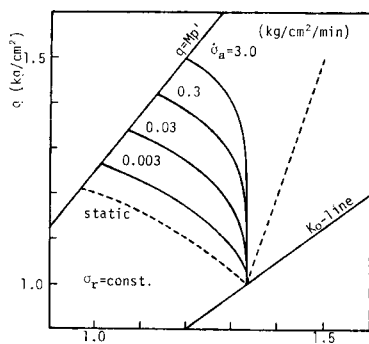
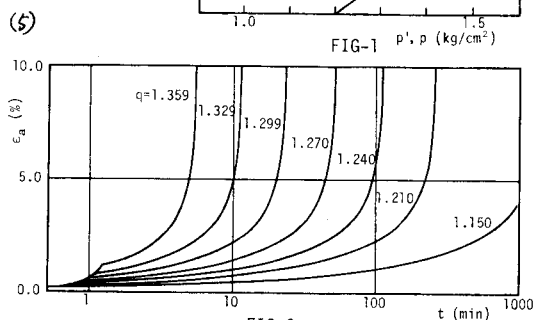
FIG-1 p', p (kg/cm²)

FIG-2

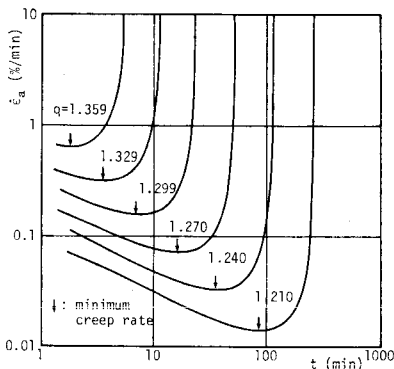


FIG-3

いま、ひずみ ϵ の増分を次式で与えるものとする。

$$\Delta \epsilon^c = \Delta t \left[(1 - \theta) \dot{\epsilon}_t^c + \theta \dot{\epsilon}_{t+\Delta t}^c \right] \quad (12)$$

そして、 $\dot{\epsilon}_{t+\Delta t}^c = \dot{\epsilon}_t^c + \left\{ \frac{\partial \dot{\epsilon}_t^c}{\partial \sigma} \right\}_t \Delta \sigma' + \left\{ \frac{\partial \dot{\epsilon}_t^c}{\partial t} \right\}_t \Delta t$ で与えられるから、これを(12)に代入し、 $(\Delta t)^2$ の項を高次の微小項として無視すると、

$$\Delta \epsilon^c = \dot{\epsilon}_t^c \Delta t + C \Delta \sigma' \quad (13)$$

$$\text{ここに、} C = \theta \Delta t \left\{ \frac{\partial \dot{\epsilon}_t^c}{\partial \sigma} \right\}_t$$

(1)の速度量を微小増分量で置き直して、(13)を代入すると

$$\begin{aligned} \Delta \sigma' &= (\mathbf{I} + \bar{\mathbf{D}} C)^{-1} \bar{\mathbf{D}} (\Delta \epsilon - \Delta t \dot{\epsilon}_t^c) \\ &= (\bar{\mathbf{D}}' + C)^{-1} (\Delta \epsilon - \Delta t \dot{\epsilon}_t^c) \end{aligned} \quad (14)$$

$$\text{ここに、} \bar{\mathbf{D}} = \left(\mathbf{D} - \frac{\mathbf{D} \mathbf{d}^T}{A + \beta} \right), \quad \dot{\epsilon}_t^c = \left(\frac{\partial F}{\partial \epsilon} \right) \bar{\mathbf{A}}$$

(14) が弾-粘塑性増分解析の基礎となる応力～ひずみ関係式である。特に、 $\theta = 0$ 場合、 $C = 0$ となり(14)は次式となる。

$$\Delta \sigma' = \bar{\mathbf{D}} (\Delta \epsilon - \Delta t \dot{\epsilon}_t^c) = \bar{\mathbf{D}} (\Delta \epsilon - \Delta \epsilon^c) \quad (15)$$

3. 数値計算例

そこで誘導した応力～ひずみ関係式を用いて、三軸試験体を対象とした有効応力有限要素解析を行なった。弾-粘塑性構成関係式は、一例として、関口らによって提案されたものを用いており、次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} F &= Q = \bar{f} - v^p = 0 \\ \bar{f} &= \alpha \ln \left\{ 1.0 + \left(\frac{v_0}{\alpha} t \right) \exp \left(\frac{f}{\alpha} \right) \right\} \\ f &= \left(\frac{\lambda - K}{1 + e_0} \right) \left\{ \ln \left(\frac{P}{P_0} \right) + \frac{(\eta - \eta_{K0})}{M} \right\} \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

FIG-1は、軸圧載荷速度一定の非排水三軸圧縮試験の応力経路を示したものであり、実線は有効応力経路を、破線は全応力経路及び静的有効応力経路である。FIG-2～7は非排水三軸圧縮クリープ試験の計算結果を示したものである。本フリープ解析においては、まず軸圧載荷速度の3 kg/cm²/min の速度で所定の軸差応力まで圧縮をおこない、その後引き続いてフリープの計算をおこなっている。したがって、経過時間は圧縮開始時からのものである。FIG-5はフリープ時の有効応力経路を示したものである。図中の矢印は最小フリープ速度の生じる点を示しているが、解析では、ほぼ一定の応力比で生じていることがわかる。また、FIG-6からフリープ変形における軸差応力レベルの軸ひずみへの影響は加速フリープに移行後、顕著になることがわかる。破壊時間と最小フリープ速度の関係は両対数紙上でほぼ完全な直線性が認められる。

参考文献

1. G.C. Noyak · O.C. Zienkiewicz (1972), Int. Jour. for Numerical Methods in Eng., Vol. 5, pp 113 ~ 135
2. I.C. Cormeau (1975), Int. Jour. for Numerical Methods in Eng., Vol. 9, pp 109 ~ 127
3. O.C. Zienkiewicz · I.C. Cormeau (1974), Int. Jour. for Numerical Methods in Eng., Vol. 8, pp 821 ~ 845
4. H. Sekiguchi · H. Ohta (1977), Preprints of Speciality Session 9, 9th ICSMFE, pp 229 ~ 238

