

1. まえがき

大の応力～変形モデルへのアプローチの一つとして、既に体系化された弾塑性論に基づく巨視的方法がある。現在のところ、この種の研究成果として土の応力～ひずみ関係までもってきているのは、Lade and Duncan (1975)^りであるように思われる。本報告は、砂の応力比～ひずみ増分比関係式に基いて塑性ポテンシャル関数を定義し、ノンアソシエートな流れ則の適用により、一般的応力条件下の応力～ひずみ関係式を誘導したものである。さらに、ニ、ミの実験結果によって本提案式の検証を行った。

1) Lade & Duncan: "Elastoplastic Stress-Strain Theory for Cohesionless Soils", ASCE, Vol. 101, No. GT10, 1975

2. 流れ則と塑性ポテンシャル関数

砂のような粒状体を弾性～ひずみ硬化塑性体とし、以下の議論の構成としては次のようにある。

$$\{d\epsilon_{ij}^p\} = \{d\epsilon_{ij}^e\} + \{d\epsilon_{ij}^p\} \quad (i, j = 1, 2, 3)$$

$$= \left[\{d\epsilon_{ij}\}_{AP} \right]_{AP} + \left[\{d\epsilon_{ij}^e\}_{AP} \right]_{AP} + \left[\{d\epsilon_{ij}^p\}_{AP} \right]_{AP} \quad (1)$$

床盤項 セん断(ダイレイタンシー)項

$$d\epsilon_{RL}^p = d\lambda \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial \sigma_{RL}} \quad (R, l = 1, 2, 3) \quad (2)$$

$$d\lambda = h \cdot df = h \cdot \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} \quad (3)$$

ここで、 $d\epsilon_{ij}^p$ = 全ひずみ増分、 $d\epsilon_{ij}^e$ = 弹性ひずみ増分、 $d\epsilon_{ij}^p$ = 塑性ひずみ増分、 dP = 平均主応力増分、 $d\gamma$ = 応力比増分 ($\gamma = \sigma_l/\sigma_R$, σ_l = セン断応力) ; Ψ = 塑性ポテンシャル関数、 σ_{ij} = 応力テンソル、 $d\lambda$ = スカラーラー量で、せん断過程中変化するひずみ硬化パラメーター、 h = ひずみ硬化関数、 f = 降伏関数。

結局、式(2)は塑性ひずみ増分を応力状態と関係づけているので、その材料に関する「流れ則」を与えるものである。

さて、筆者らの多軸試験および平面ひずみ試験結果などに基づく砂のせん断成分のせん断ひずみ～応力条件下の流れ則は、せん断のごく初期を除く破壊時までのせん断変形過程では次のような関係式で示された。^{2,3)}なお、せん断成分は式(1)より求めた。

$$\frac{\gamma}{P} - M'(b) = R(b) \left\{ -\frac{d\sigma_{AP}^p}{d\sigma_{AP}^e} \right\} \quad (4)$$

ここで、 b は中間主応力 σ_2 の大きさを表すパラメータで、 $b = (\sigma_2 - \sigma_3)/(\sigma_1 - \sigma_3)$ である。又、 $d\sigma_{AP}^p$ = ダイレイタンシーによる塑性体積ひずみ増分、 $d\sigma_{AP}^e$ = 塑性せん断ひずみ増分。但し、砂の弾性ひずみは塑性ひずみに比べ非常に小さなので、各ひずみ増分はそれ

* され、 $d\sigma_{AP} \approx d\sigma_{AP}^p$ 、 $d\sigma_{AP} \approx d\sigma_{AP}^e$ として計算している。上記の式(4)の係数 M' と危険 b 値によって変化するこことを意味する。次に、式(4)より一般的応力条件下の塑性ポテンシャル関数 Ψ を求めて見よう。塑性ひずみ増分ベクトルの方向は塑性ポテンシャル面に直交するという直交条件、 $(-d\sigma_{AP}^p/d\sigma_{AP}) = 1/b$ を用いれば、次のようないくつかの関係式が得られる。

$$\Psi = P \left\{ \frac{R(b)-1}{R(b)} \cdot \frac{b}{P} + \frac{M'(b)}{R(b)} \right\} \frac{R(b)}{R(b)-1} \quad (5)$$

ここで、 Ψ は任意の一つの塑性ポテンシャル面に関する一定である。図-1は平面ひずみ条件下の式(5)による塑性ポテンシャル面を(P , γ)応力面内に示しているが、図中には実測された塑性ひずみ増分ベクトルも同時に示している。その結果、塑性ポテンシャル面と塑性ひずみ増分ベクトルの直交性をこの程度の近似度で表わしえうといふことがわかる。なお、平面ひずみ条件下の b 値はせん断中変化するが、ここでは第一ステップとして $M'(b)$ および $R(b)$ を固定させた。

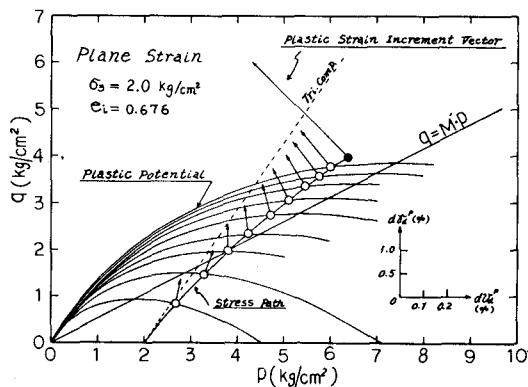


図-1 平面ひずみ条件下における砂の塑性ポテンシャル面と塑性ひずみ増分ベクトル

3. 一般的の応力条件下的応力～ひずみ関係式

以上の議論ではチキ型（ノンアソシエートな流れ則）と仮定しているので、せん断に伴うダイレイタシーに着目した塑性ひずみ増分($d\varepsilon^P$)は式(2),(3),(5)より次のようになります。

$$(d\varepsilon_{\text{rel}}^P)_d = h \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial \delta_{\text{rel}}} \cdot \frac{\partial f}{\partial \delta_{ij}} d\delta_{ij} \quad \dots \quad (6)$$

従つて、 $d\omega^P$ および $d\bar{\omega}^P$ は式(6)よりそれぞれ、

$$d\mathcal{U}_k^P = h \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial P} df = h \left\{ \frac{R(b)-1}{R(b)} \eta + \frac{M'(b)}{R(b)} \right\} \frac{1}{\frac{R(b)}{R(b)-1}} \left\{ \frac{M'(b)}{R(b)} - \frac{1}{R(b)} \eta \right\} df$$

となる。次に、残る課題として降伏関数の決定とひずみ硬化 図-2 ひずみ硬化関数n～塑性係数(η_p)関係
関数nの評価であるが、ここでひずみに関する三軸圧縮条件下で第一近似
として検証済みの $\eta = \frac{d}{p} = 2$ を用いることにする(例えは、両図⁴⁾)。つ
まり、この降伏関数がどの程度他の応力条件下のひずみを予測できるのか
という意図もある。

4. ひずみ硬化関数の評価(等方硬化則)

塑性変形の進行に伴って、降伏面は応力空間で等方向的に拡大するという、いわゆる等方硬化則を仮定する。次に、ひずみ硬化閾数 η を塑性係数の閾数とした場合を考えよう。砂におけるエネルギー消散は主に粒子接触点での粒子間すべり又はせん断によるものと仮定する。もしすべりが $\theta = M(\sigma) \cdot P$ で起こるとするとならば、その時なされた単位体積当たりの塑性係数増分かつて、せん断過程があり段階（破壊時）までなされた全塑性係数は各々、

$$(dW^P)_x = M'(b) P d\delta_x^P \quad \dots \dots \dots (9) \quad (W^P)_x = M'(b) \int_0^{d\delta_x^P} P d\delta_u^P \quad \dots \dots \dots (10)$$

$$(dW^\rho)_x = M'(b)P d\delta_x^\rho \quad \dots \dots \dots \quad (9) \quad (W^\rho)_x = M'(b) \int_0^{\infty} P d\delta_x^\rho \quad \dots \dots \dots \quad (10)$$

となる。ここで、式(9), (10)に b 値を導入した理由は、 b 値が異なれば砂のひずみ硬化挙動もおりずと違つてくらうからである。上記の $M(b)$ は応力条件によつて変化するので、ここでは便宜上、式(11)のよう書き換える。

$$(W_p^*)_d = \int_0^{ds^p} P ds^p \simeq \sum_d P ds^p \quad \left(\text{但し、ここでは石炭の破壊規準は考慮せずに、第一スラッシュとしての解 构である。} \right)$$

従って、ひずみ硬化の拡大と塑性せん断ひずみの実測データに基づいて式(8)よりこれを、式(11)より(ηP^*)_cを計算すれば、その相互関係が得られるはずである。図-1に砂り各種せん断試験結果の η ～(ηP^*)_c関係を示す。その結果、 b 値をパラメータとして両者の間に一義的な関係があり、拘束圧や供試体密度に依らないようである。故に、 $\log \eta$ と $\log (\eta P^*)_{c}$ との間に直線関係が仮定できそう、ひずみ硬化関数を次式で表せばだろう。

$$h = m(b) \cdot (W_P^*)_d^n \quad \left(h \text{は両対数プロットにおける直線の勾配。} \right)$$

----- (12) $m(b)$ は $(W_P^*)_d = 1.0$ に関する値。

従つて、式(12)を式(7), (8)へ代入すれば、種々の応力条件下的応力をひずみ曲線が数値計算により予測される。図-3, 4, 5 に本提案式の検証を行い、その潜在的有用性を示した。末筆ながら、本学浅川美利教授、宮森達哉助教の懇意な御指導を仰いだことに、厚く感謝し意を表したい。

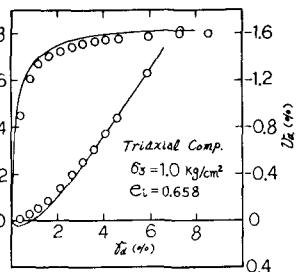
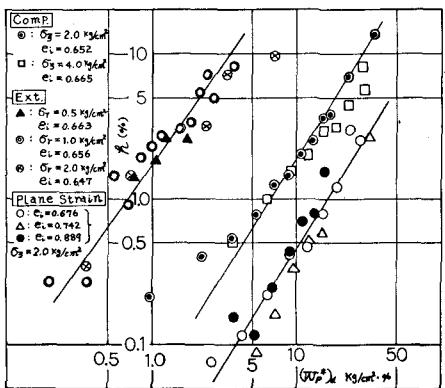


図-3 三軸圧縮条件下($b=0$)の応力～ひずみ曲線の予測

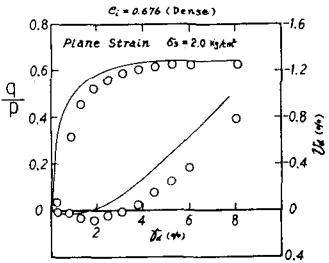


図-4 平面ひずみ条件下の応力～ひずみ曲線の予測

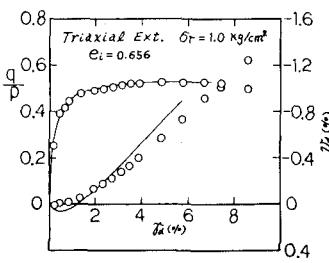


図-5 三軸伸張条件下($b=1$)の応力～ひずみ曲線の予測